



One Way ANOVA

One Way ANOVA (Analysis of Variance)

Ζιντζαράς Ηλίας, M.Sc., Ph.D.

Καθηγητής Βιομαθηματικών-Βιομετρίας

Εργαστήριο Βιομαθηματικών

Τμήμα Ιατρικής

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Institute for Clinical Research and Health Policy Studies

Tufts University School of Medicine

Boston, MA, USA

Θεόδωρος Μπρότσης, MSc, PhD

Εντεταλμένος Διδάσκων

(<http://biomath.med.uth.gr>)

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

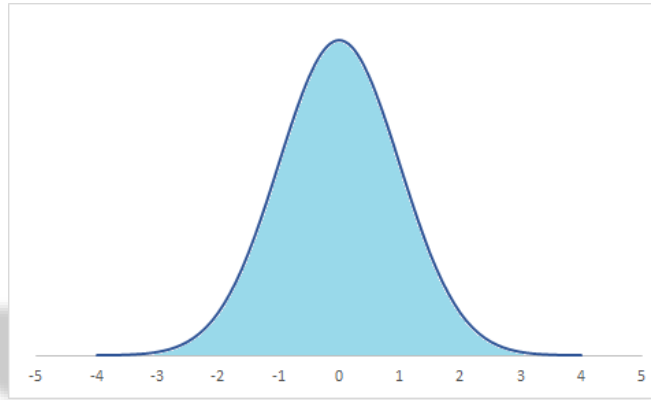
Email: tmprotsis@uth.gr



Γιατί ANOVA;

- Μέχρι τώρα συγκρίναμε δύο πληθυσμούς
 - T-Test για ανεξάρτητα δείγματα (T-Test for independent samples)
 - T-Test για εξαρτημένα δείγματα (Paired samples T-Test)
- Το να περιοριστούμε σε δύο πληθυσμούς αποτελεί φυσικά περιορισμό
- Τι γίνεται λοιπόν αν θελήσουμε να συγκρίνουμε τις μέσες τιμές περισσότερων των δύο πληθυσμών;
- Αν θελήσουμε να συγκρίνουμε πληθυσμούς με τον καθένα να αποτελείται από διάφορα επίπεδα ή υπο-ομάδες;
- Για το λόγο αυτό θα κάνουμε χρήση της ANOVA· **AN**alysis **O**f **VA**riance

Έστω πως θέλουμε να συγκρίνουμε τις μέσες τιμές ΤΡΙΩΝ δειγμάτων για να δούμε αν υπάρχουν διαφορές μεταξύ τους

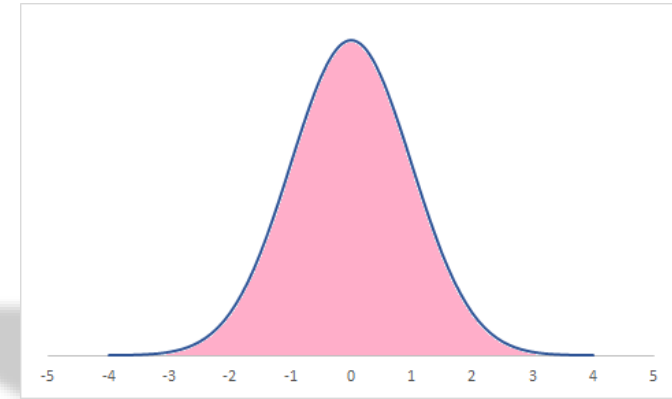


μ_1

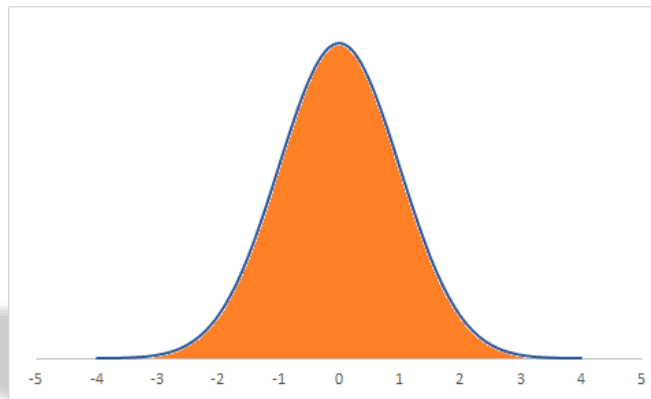
Ή είναι μία μέση τιμή τόσο μακριά από τις άλλες δύο ώστε να μην ανήκει στον ίδιο πληθυσμό;

Αυτό που ρωτάμε είναι:

Προέρχονται όλες αυτές οι μέσες τιμές από τον ίδιο πληθυσμό;

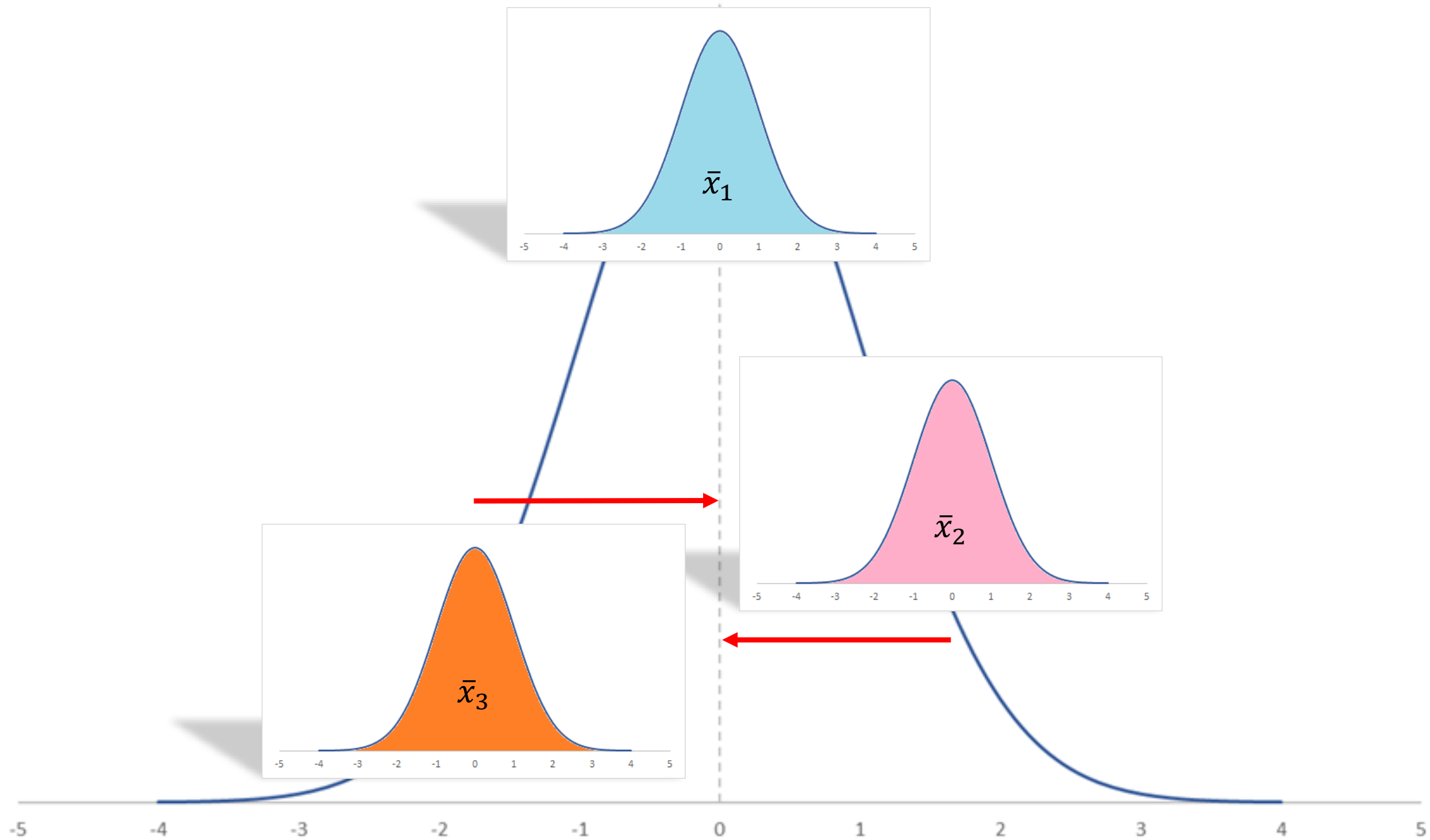


μ_2

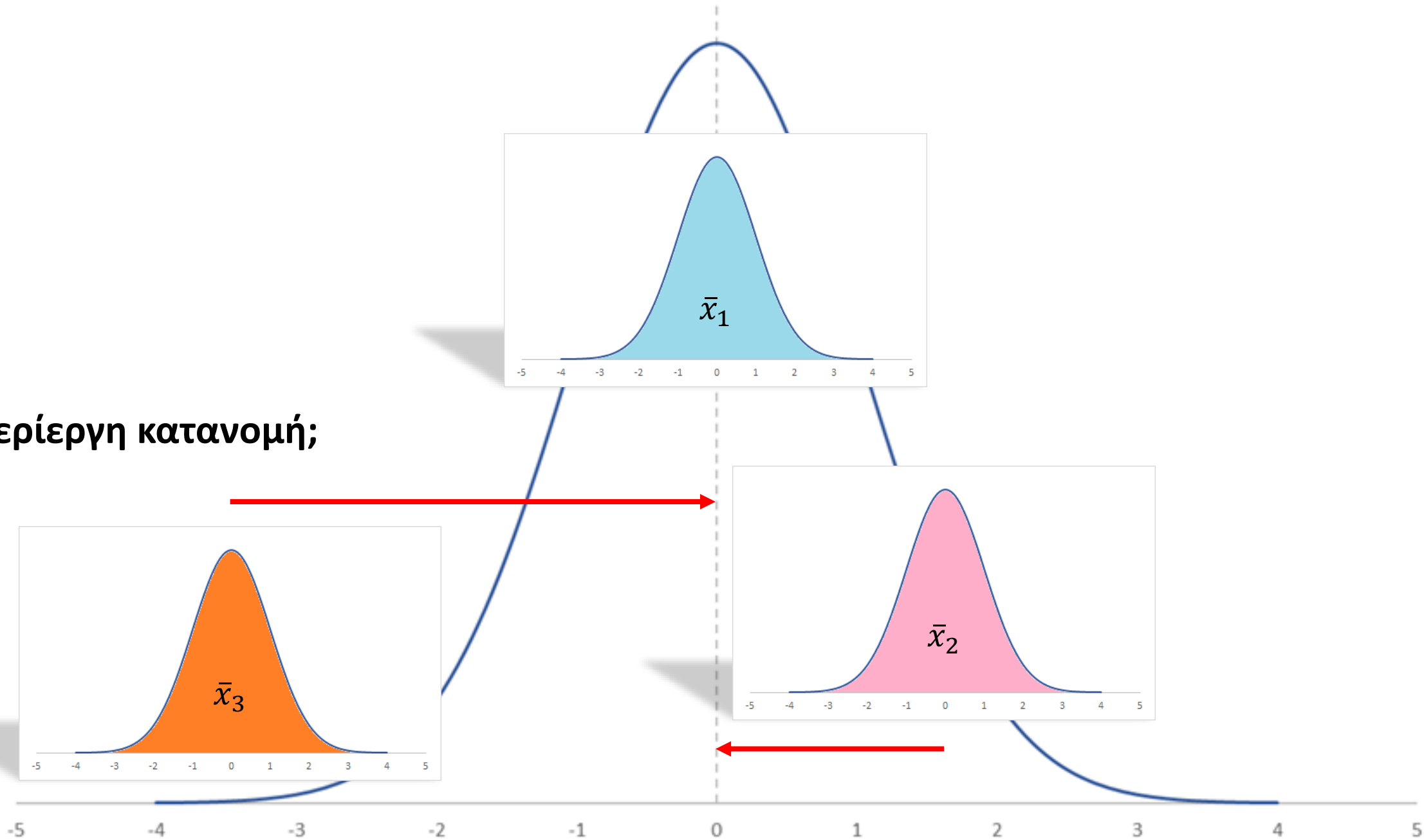


μ_3

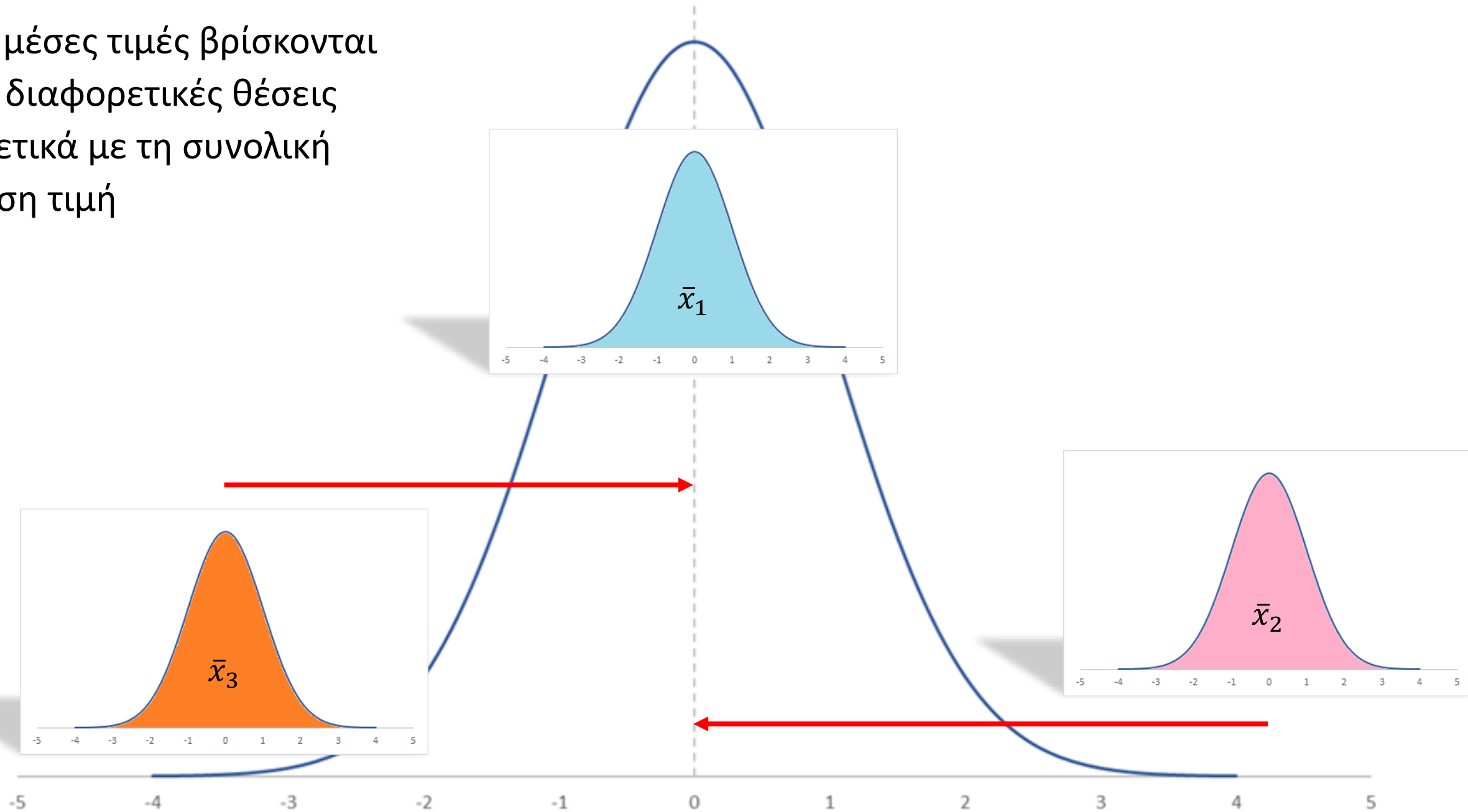
Ή είναι όλες τόσο μακριά μεταξύ τους ώστε να μην προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό;



Περίεργη κατανομή;



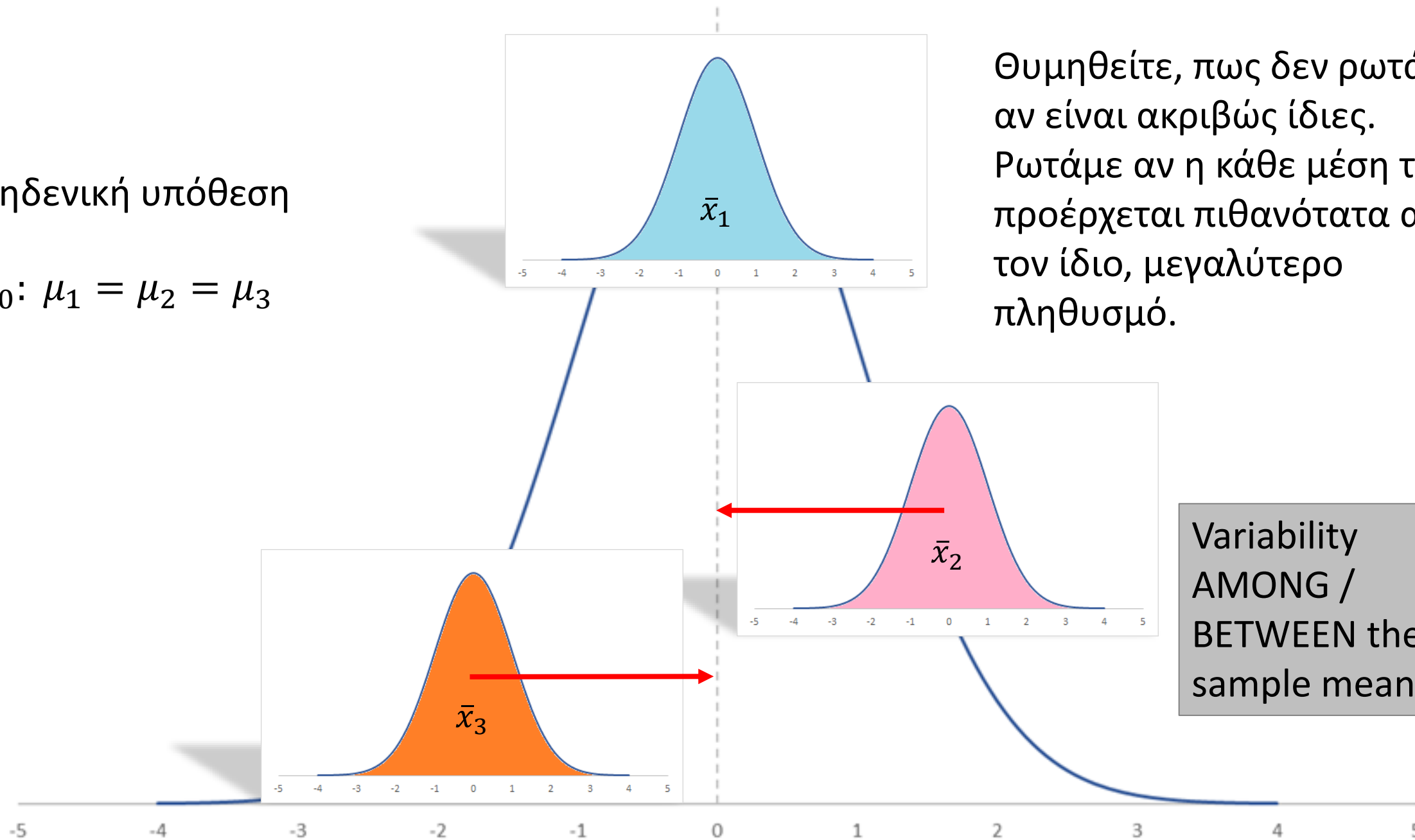
Οι μέσες τιμές βρίσκονται σε διαφορετικές θέσεις σχετικά με τη συνολική μέση τιμή



Μηδενική υπόθεση

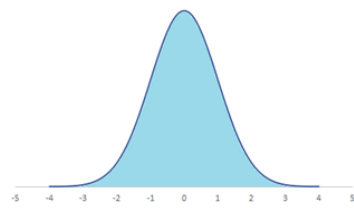
$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

Θυμηθείτε, πως δεν ρωτάμε αν είναι ακριβώς ίδιες. Ρωτάμε αν η κάθε μέση τιμή προέρχεται πιθανότατα από τον ίδιο, μεγαλύτερο πληθυσμό.

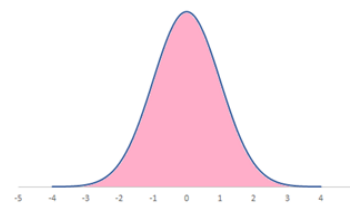


Variability
AMONG /
BETWEEN the
sample means.

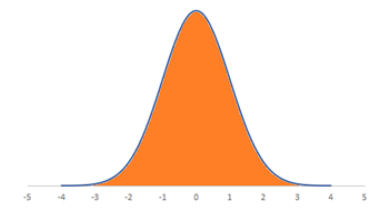
Πολλαπλά t-tests



\bar{x}_1



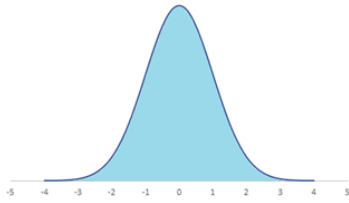
\bar{x}_2



\bar{x}_3

$$H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2; \alpha = .05$$

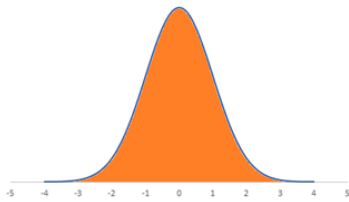
$$H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_3; \alpha = .05$$



\bar{x}_1



\bar{x}_2



\bar{x}_3

Σύγκριση ανά ζεύγη
σημαίνει τρία t-tests, ΟΛΑ
με $\alpha = .05$ σφάλμα τύπου I
με 95% εμπιστοσύνη

Το σφάλμα όμως συνδυάζεται με τους
τρεις ελέγχους και έτσι γίνεται:
 $(1 - .05)(1 - .05)(1 - .05) = 0.857$

$$H_0: \bar{x}_2 = \bar{x}_3; \alpha = .05$$

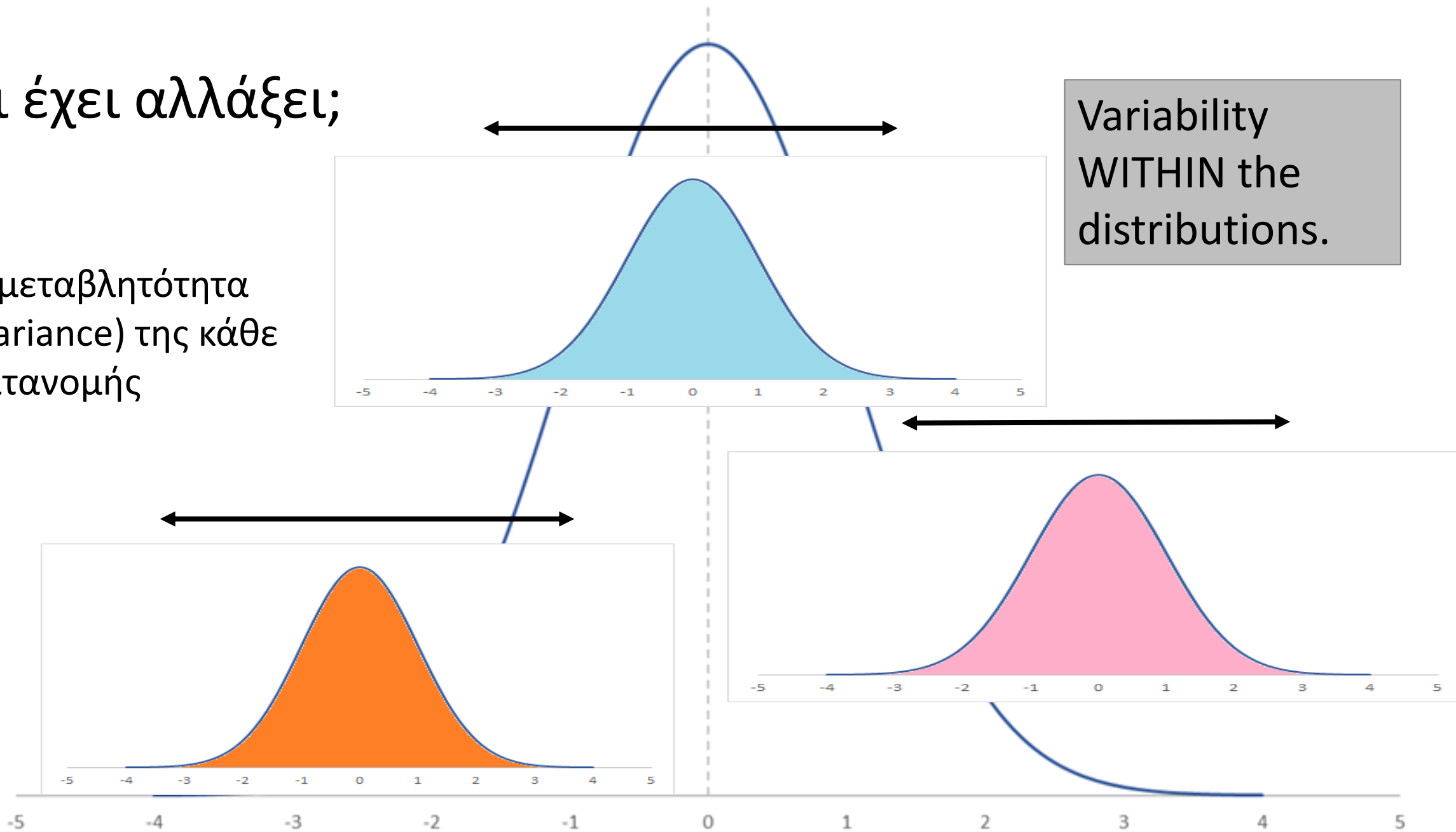
$$\alpha = 1 - .857 = .143$$

Σφάλμα τύπου I: παρουσιάζεται όταν ο ερευνητής απορρίπτει εσφαλμένα τη μηδενική υπόθεση

Τι έχει αλλάξει;

Η μεταβλητότητα
(variance) της κάθε
κατανομής

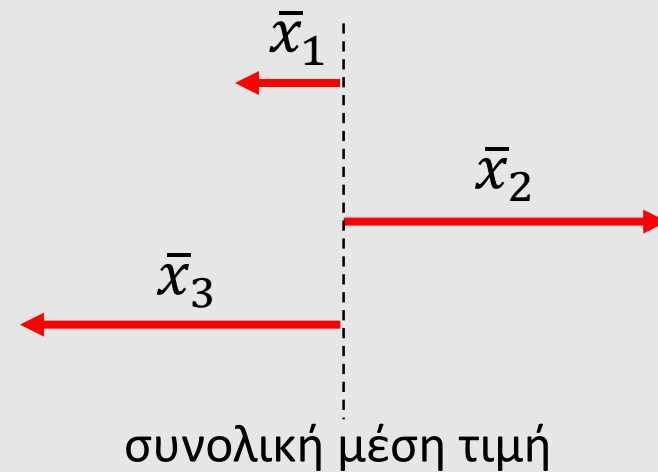
Variability
WITHIN the
distributions.





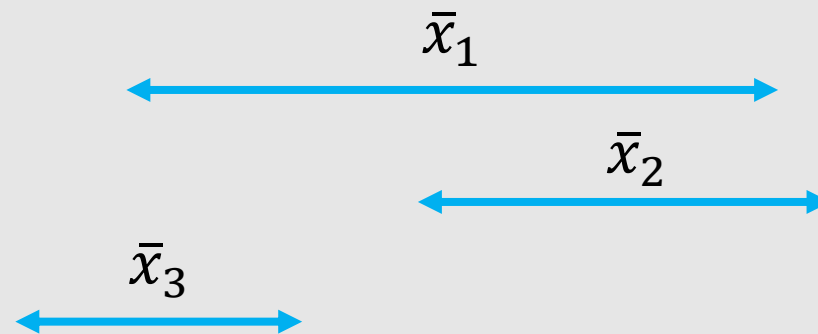
ANOVA: Analysis of Variance είναι μία αναλογία μεταβλητότητας

Variability
AMONG / BETWEEN
the sample means.



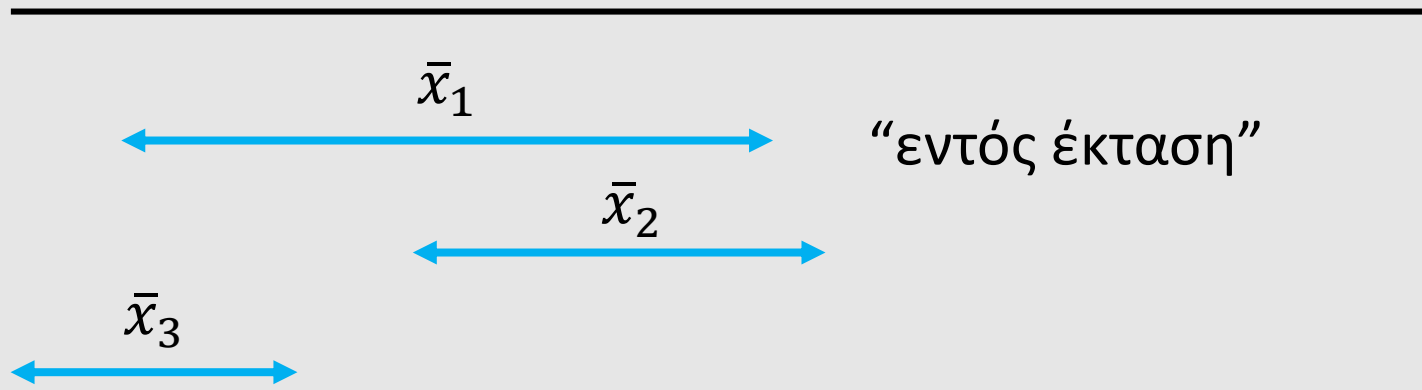
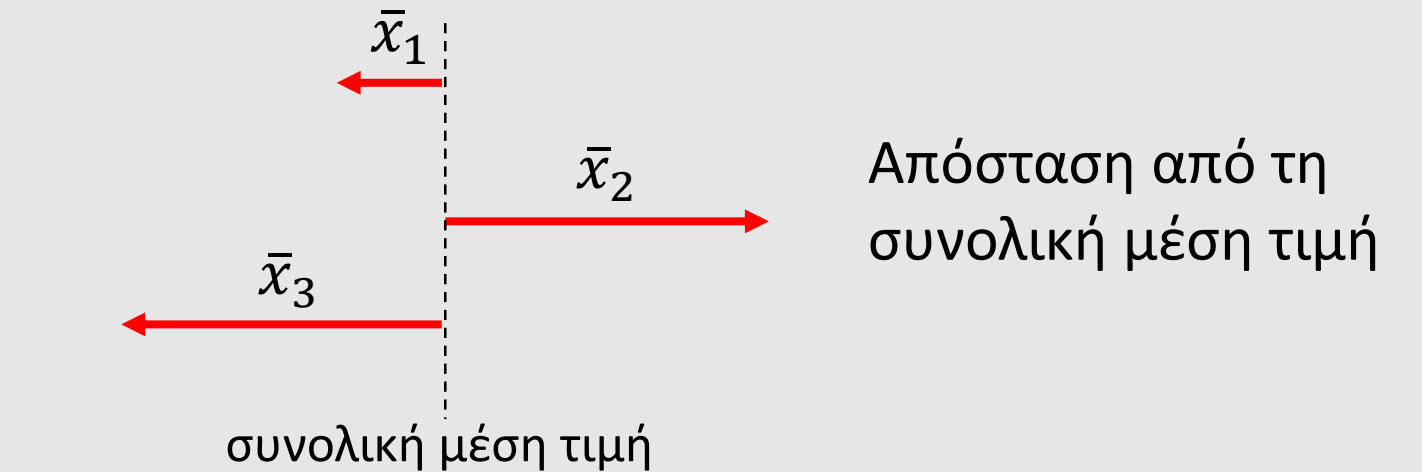
Απόσταση από τη
συνολική μέση τιμή

Variability
WITHIN the
distributions.





ANOVA: Analysis of Variance είναι μία αναλογία μεταβλητότητας



$$= \frac{\textit{Variance Between}}{\textit{Variance Within}}$$



ANOVA: Analysis of Variance είναι μία αναλογία μεταβλητότητας

$$\left. \frac{\textit{Variance Between}}{\textit{Variance Within}} \right\} \text{Συστατικά συνολικής διακύμανσης} \\ \textit{(Total Variance Components)}$$

$$\textit{Variance Between} + \textit{Variance Within} = \textit{Total Variance}$$

Διαμερισμός – διαχωρισμός συνολικής διακύμανσης στα συστατικά της

Αν η μεταβλητότητα ΜΕΤΑΞΥ (BETWEEN) των μέσων τιμών (απόσταση από τη συνολική μέση τιμή) στον αριθμητή είναι σχετικά μεγάλη σε σχέση με την μεταβλητότητα ΕΝΤΟΣ (WITHIN) των δειγμάτων (ενδογενή διακύμανση) στον παρονομαστή, η αναλογία είναι πολύ μεγαλύτερη από 1. Τότε, πιθανότητα, τα δείγματα ΝΑ ΜΗΝ προέρχονται από ένα κοινό πληθυσμό· ΑΠΟΡΡΙΨΗ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ότι οι μέσες τιμές είναι ίδιες



ANOVA: Analysis of Variance είναι μία αναλογία μεταβλητότητας

$$\frac{\text{ΜΕΓΑΛΗ}}{\text{μικρή}} = \text{Απόρριψη της } H_0$$

Τουλάχιστον μία μέση τιμή είναι ακραία και κάθε κατανομή στενή· διαχωρίζονται μεταξύ τους

$$\frac{\text{Variance Between}}{\text{Variance Within}} \quad \frac{\text{ΠΑΡΟΜΟΙΑ}}{\text{ΠΑΡΟΜΟΙΑ}} = \text{αποτυχία απόρριψης της } H_0$$

Οι μέσες τιμές είναι σχετικά κοντά στη συνολική μέση τιμή και/ή οι κατανομές επικαλύπτονται λίγο· Δύσκολα να διαχωριστούν

$$\frac{\text{μικρή}}{\text{ΜΕΓΑΛΗ}} = \text{αποτυχία απόρριψης της } H_0$$

Οι μέσες τιμές είναι σχετικά κοντά στη συνολική μέση τιμή και/ή οι κατανομές επικαλύπτονται αρκετά

ANOVA: Analysis of Variance είναι μία αναλογία μεταβλητότητας

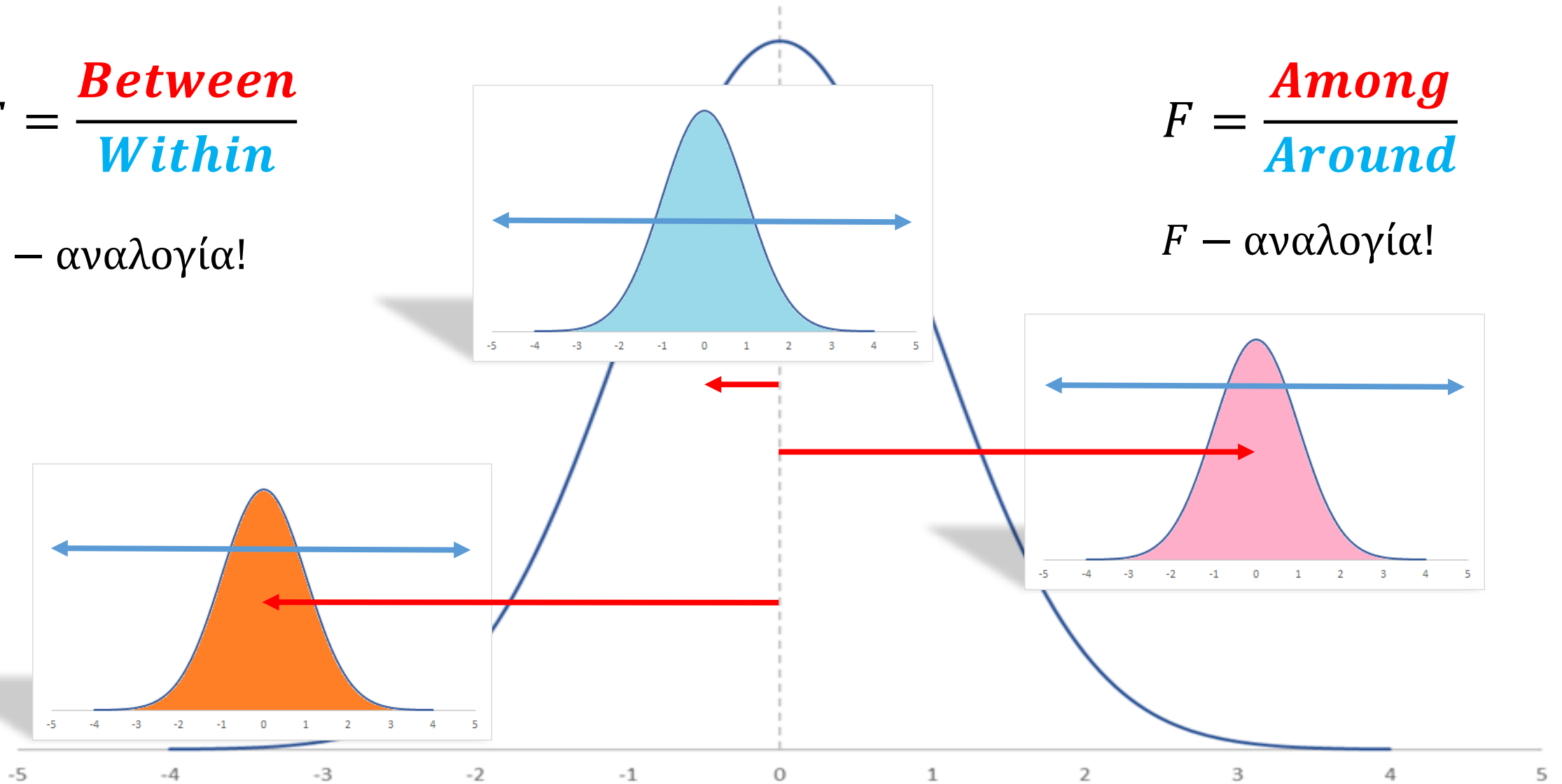
$$\text{Variance Between} + \text{Variance Within} = \text{Total Variance}$$

$$F = \frac{\text{Between}}{\text{Within}}$$

F – αναλογία!

$$F = \frac{\text{Among}}{\text{Around}}$$

F – αναλογία!





Γιατί ANOVA;

- Μέχρι τώρα συγκρίναμε δύο πληθυσμούς
 - T-Test για ανεξάρτητα δείγματα (T-Test for independent samples)
 - T-Test για εξαρτημένα δείγματα (Paired samples T-Test)
- Το να περιοριστούμε σε δύο πληθυσμούς αποτελεί φυσικά περιορισμό
- Αν λοιπόν θελήσουμε να συγκρίνουμε τις μέσες τιμές περισσότερων των δύο πληθυσμών;
- Αν θελήσουμε να συγκρίνουμε πληθυσμούς με τον καθένα να αποτελείται από διάφορα επίπεδα ή υπο-ομάδες;
- Τότε θα κάναμε χρήση της ANOVA: **AN**alysis **O**f **VA**riance

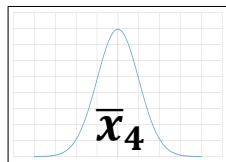
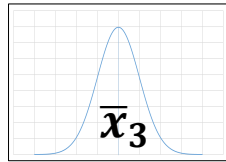
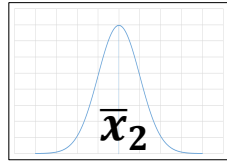
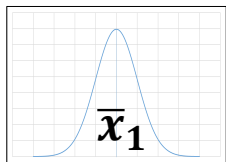
Σε μία μελέτη, έχει καταγραφεί το βάρος του ήπατος (εκφρασμένο ως ποσοστό του βάρους του σώματος) ποντικών που ανήκουν σε $k=4$ ομάδες που τράφηκαν με 4 δίαιτες. Θέλουμε να ερευνήσουμε αν υπάρχουν συστηματικές διαφορές μεταξύ των 4 ομάδων.

Columns / Groups

Ένας παράγοντας
“δίαιτες”

	a	b	c	d	
	3.42	3.17	3.34	3.64	
	3.96	3.63	3.72	3.93	
	3.87	3.38	3.81	3.77	
	4.19	3.47	3.66	4.18	
	3.58	3.39	3.55	4.21	
	3.76	3.41	3.51	3.88	
Μέση τιμή	3.80	3.41	3.60	3.94	3.69 (total)

Πηγές μεταβλητότητας



	a	b	c	d
	3.42	3.17	3.34	3.64
	3.96	3.63	3.72	3.93
	3.87	3.38	3.81	3.77
	4.19	3.47	3.66	4.18
	3.58	3.39	3.55	4.21
	3.76	3.41	3.51	3.88
Μέση τιμή	$\bar{x}_1 = 3.80$	$\bar{x}_2 = 3.41$	$\bar{x}_3 = 3.60$	$\bar{x}_4 = 3.94$

Συνολική μέση τιμή:

Η μέση τιμή όλων των βαρών του ήπατος

$$\bar{\bar{x}} = 3.69$$

- Ο έλεγχος για τις διαφορές μεταξύ των ομάδων βασίζεται στον εντοπισμό όλων των πηγών που διαμορφώνουν την μεταβλητότητα των δεδομένων (δηλ. τι κάνει τα 24 νούμερα να είναι διαφορετικά).
- Οπότε, η συνολική μεταβλητότητα (ή διακύμανση) αναλύεται στις επιμέρους πηγές διακύμανσης που την συνθέτουν (**analysis of variance, ANOVA**)



Πηγές μεταβλητότητας

	a	b	c	d	
	3.42	3.17	3.34	3.64	
	3.96	3.63	3.72	3.93	
	3.87	3.38	3.81	3.77	
	4.19	3.47	3.66	4.18	
	3.58	3.39	3.55	4.21	
	3.76	3.41	3.51	3.88	
Μέση τιμή	3.80	3.41	3.60	3.94	3.69 (total)

- Προφανώς, μία πηγή διακύμανσης είναι η επίδραση των **4 διαιτών**
- Μία άλλη πηγή διακύμανσης είναι η ενδογενή διακύμανση (within) μέσα στην κάθε ομάδα αφού το κάθε ποντίκι αντιδρά διαφορετικά στην ίδια δίαιτα· αυτή η μεταβλητότητα δεν μπορεί να ελεγχθεί και συνεπώς θεωρείται ως **τυχαίο σφάλμα** ή **τυχαία διακύμανση** (error)



Διακύμανση και άθροισμα τετραγώνων

- Δεδομένου ότι η ANOVA είναι εξ ορισμού η «ανάλυση της διακύμανσης», θα πρέπει να εξετάσουμε τη διακύμανση ως έννοια
- Ως διακύμανση ορίζουμε τη μέση τετραγωνική απόκλιση ενός σημείου από την μέση τιμή της κατανομής
 - Παίρνουμε την απόσταση κάθε σημείου από τη μέση τιμή, τετραγωνίζουμε, αθροίζουμε και βρίσκουμε τη μέση τιμή
- Αν βγάλουμε το «βρίσκουμε τη μέση τιμή» θα έχουμε το άθροισμα των τετραγώνων (sum of squares)
- Επομένως το sum of squares είναι η διακύμανση χωρίς την εύρεση της μέσης τιμής των τετραγωνικών αποκλίσεων



Διακύμανση και άθροισμα τετραγώνων

Διακύμανση δείγματος

$$s^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{n - 1}$$

$$s^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{n - 1}$$

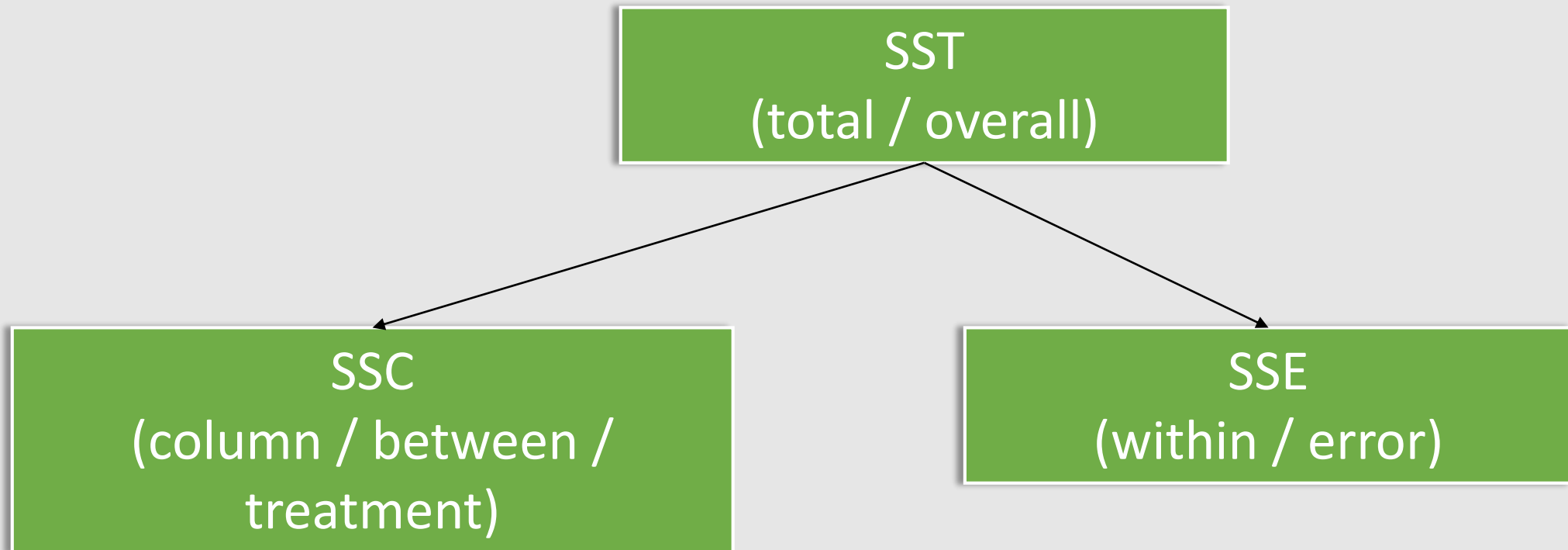
Άθροισμα τετραγώνων
Sum of squares

$$SS = \sum (x - \mu)^2$$





Διαχωρισμός αθροίσματος τετραγώνων





Υπολογισμός του SST (sum of squares total)

	A	B	C	D	E
1		a	b	c	d
2		3.42	3.17	3.34	3.64
3		3.96	3.63	3.72	3.93
4		3.87	3.38	3.81	3.77
5		4.19	3.47	3.66	4.18
6		3.58	3.39	3.55	4.21
7		3.76	3.41	3.51	3.88
8					
9	Μέση τιμή	3.7966667	3.40833	3.59833	3.935

Συνολική μέση τιμή:
Η μέση τιμή όλων των τιμών είναι $\bar{x} = 3.69$

Υπολογισμός του συνολικού SST

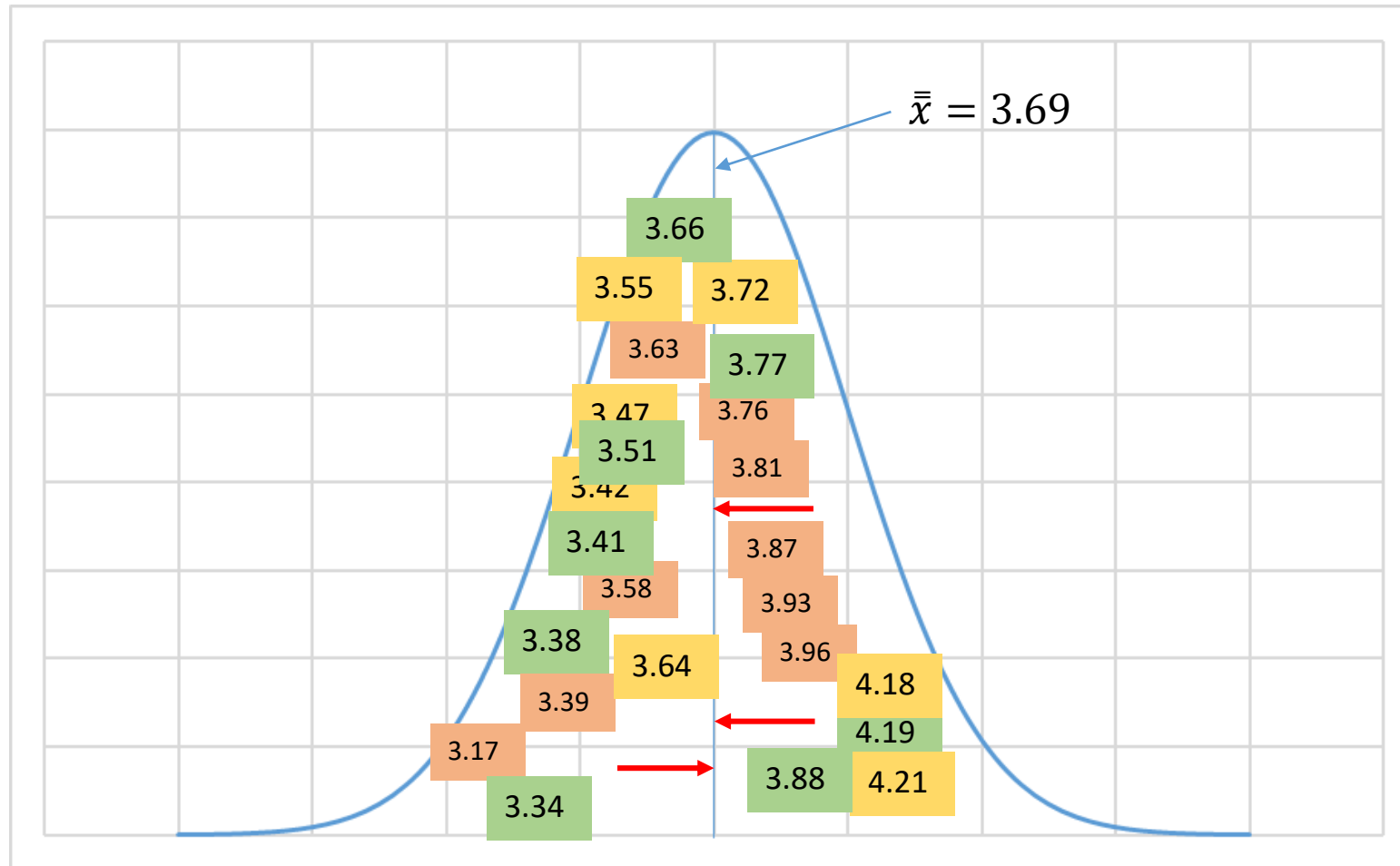
1. Βρίσκουμε τις διαφορές ανάμεσα σε κάθε τιμή και την συνολική μέση τιμή
2. Υψώνουμε στη δύναμη του 2 τις διαφορές
3. Αθροίζουμε

`=AVERAGE(B2:B7)`

`=VAR.S(B2:E7)*23`

1.835196

SST (total / overall)



Υπολογισμός
του συνολικού
SST

1. Βρίσκουμε τις διαφορές ανάμεσα σε κάθε τιμή και την συνολική μέση τιμή
2. Υψώνουμε στη δύναμη του 2 τις διαφορές
3. Αθροίζουμε

Η τετραγωνισμένη απόσταση είναι κυριολεκτικά ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ



Υπολογισμός του Between groups SSC

	A	B	C	D	E
1		a	b	c	d
2		3.42	3.17	3.34	3.64
3		3.96	3.63	3.72	3.93
4		3.87	3.38	3.81	3.77
5		4.19	3.47	3.66	4.18
6		3.58	3.39	3.55	4.21
7		3.76	3.41	3.51	3.88
8					
9	Μέση τιμή	3.7966667	3.40833	3.59833	3.935

Συνολική μέση τιμή:

Η μέση τιμή όλων των τιμών είναι $\bar{x} = 3.69$

Υπολογισμός SSC between groups

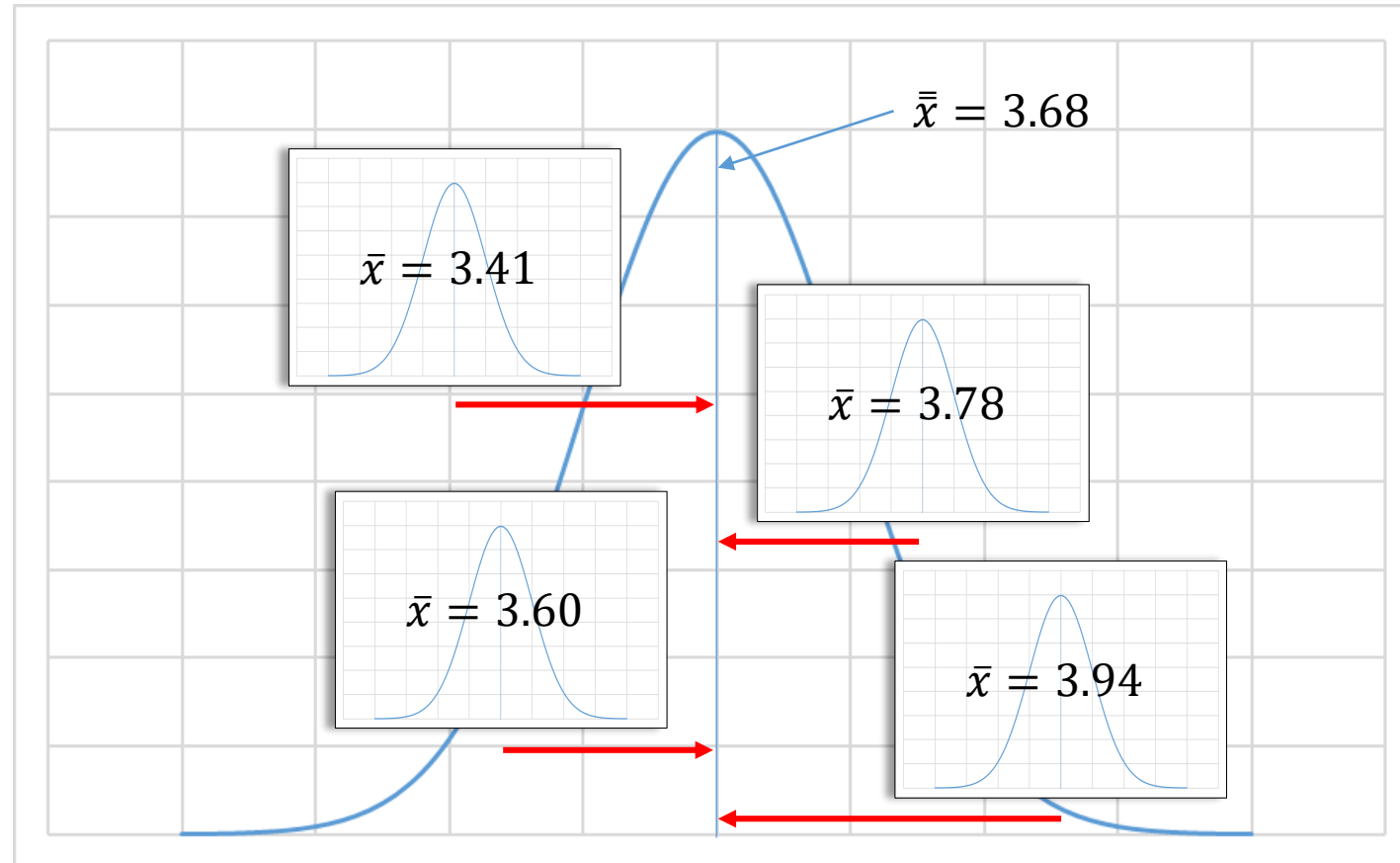
1. Βρίσκουμε τις διαφορές ανάμεσα στη μέση τιμή των στηλών και την συνολική μέση τιμή
2. Υψώνουμε στη δύναμη του 2 τις διαφορές
3. Πολλαπλασιάζουμε τις τετραγωνισμένες διαφορές με τον αριθμό των παρατηρήσεων
4. Αθροίζουμε

`=AVERAGE(B2:B7)`

`=VAR.S(B9:E9)*3*6`

0.954145833

SSC
(column / between /
treatment)
sum of squares



Υπολογισμός SSC
between groups

1. Βρίσκουμε τις διαφορές ανάμεσα στη μέση τιμή των στηλών και την συνολική μέση τιμή
2. Υψώνουμε στη δύναμη του 2 τις διαφορές
3. Πολλαπλασιάζου με τις τετραγωνισμένες διαφορές με τον αριθμό των παρατηρήσεων
4. Αθροίζουμε



Υπολογισμός του error SSE

	A	B	C	D	E
1		a	b	c	d
2		3.42	3.17	3.34	3.64
3		3.96	3.63	3.72	3.93
4		3.87	3.38	3.81	3.77
5		4.19	3.47	3.66	4.18
6		3.58	3.39	3.55	4.21
7		3.76	3.41	3.51	3.88
8					
9	Μέση τιμή	3.7966667	3.40833	3.59833	3.935

~~$\bar{x} = 3.69$~~

Υπολογισμός του Error SSE

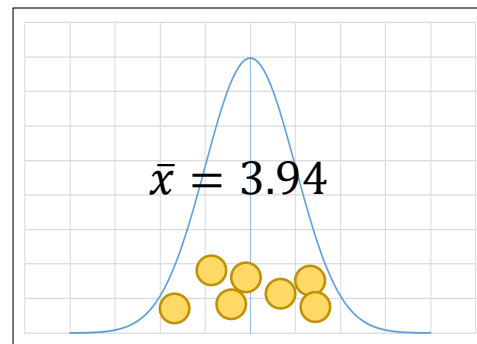
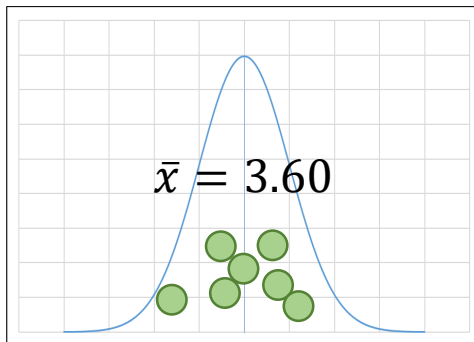
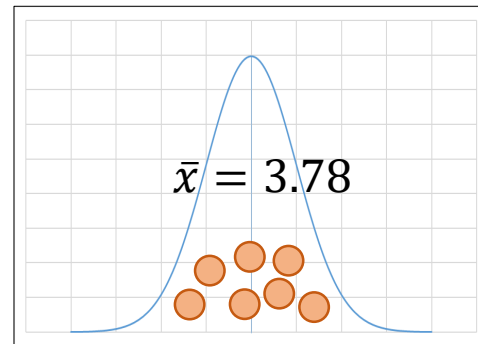
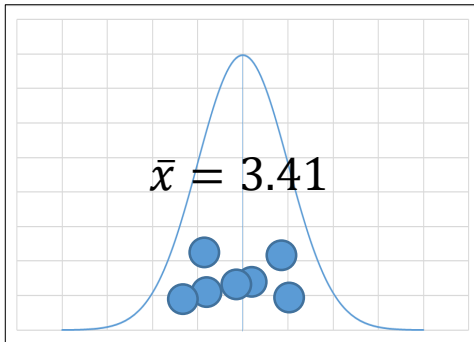
1. Βρίσκουμε τις διαφορές ανάμεσα σε κάθε τιμή και τη μέση τιμή της στήλης
2. Υψώνουμε στη δύναμη του 2 τις διαφορές
3. Αθροίζουμε
4. Προσθέτουμε το 3. για όλες τις στήλες

```
=AVERAGE(B2:B7)
```

```
0.88105  
=VAR.S(B2:B7)*5+VAR.S(C2:C7)*5+VAR.S(D2:D7)*5+VAR.S(E2:E7)*5
```

SSE

(within / error)
sum of squares



Υπολογισμός του Error SSE

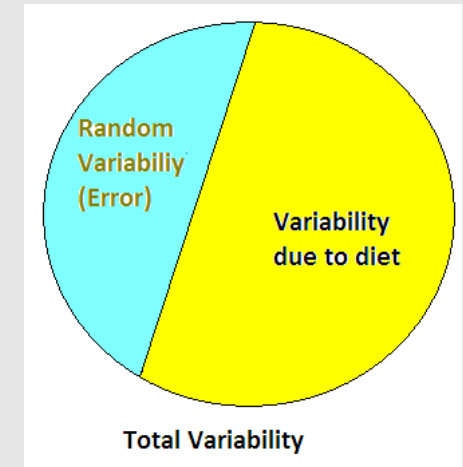
1. Βρίσκουμε τις διαφορές ανάμεσα σε κάθε τιμή και τη μέση τιμή της στήλης
2. Υψώνουμε στη δύναμη του 2 τις διαφορές
3. Αθροίζουμε
4. Προσθέτουμε το 3. για όλες τις στήλες



One Way ANOVA

Η ANOVA παρουσιάζεται με τη μορφή του παρακάτω πίνακα:

Source of variation (Πηγή μεταβλητότητας)	df (Βαθμοί ελευθερίας)	SS (Sum of squares)
Between groups (Μεταξύ των ομάδων)	4-1=3 (C-1)	0.954
Within groups (Εντός των ομάδων) (error/random)	24-4=20 (N-C)	0.881
Total	24-1=23 (N-1)	1.83



weight	ANOVA				
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	.954	3	.318	7.220	.002
Within Groups	.881	20	.044		
Total	1.835	23			

N = συνολικές παρατηρήσεις, **C** = #columns/groups/treatments/diets



One Way Anova

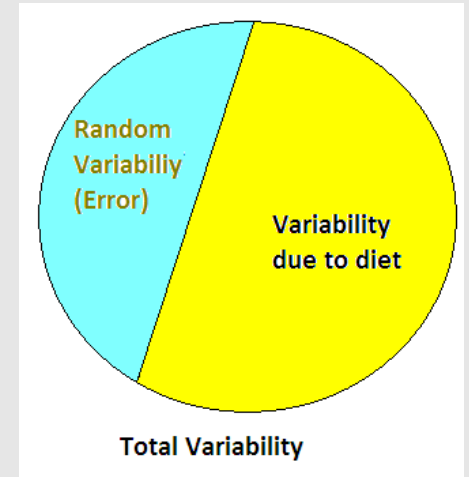
Μετά υπολογίζεται, η **μέση** διακύμανση (Mean Square, MS), δηλ. $MS=SS/df$, της κάθε πηγής διακύμανσης

Source of variation	df	SS	MS=SS/df (μέσα τετράγωνα)
---------------------	----	----	------------------------------

Between groups	3	0.954	0.318
-----------------------	----------	--------------	--------------

Within groups (error/random)	20	0.881	0.044=s²
---	-----------	--------------	----------------------------

Total	23	1.83	
--------------	-----------	-------------	--



ANOVA					
weight	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	.954	3	.318	7.220	.002
Within Groups	.881	20	.044		
Total	1.835	23			



F – test

- Κατόπιν, η μέση διακύμανση μεταξύ των 4 ομάδων συγκρίνεται με την μέση τυχαία διακύμανση (δηλ. με την ενδογενή διακύμανση της κάθε ομάδας) χρησιμοποιώντας το ***F – Test***:

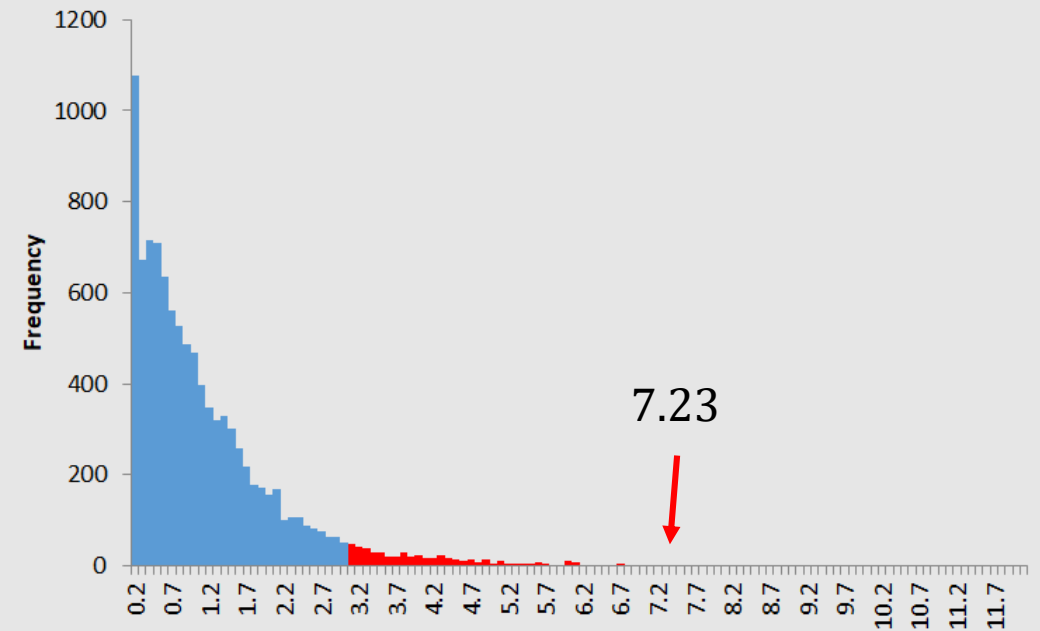
- $$F = \frac{\text{διακύμανση μεταξύ των ομάδων}}{\text{τυχαία διακύμανση}} = \frac{\textit{Between group MS}}{\textit{Error MS}} = \frac{0.318}{0.044} = 7.23$$

- **Αν η μέση διακύμανση μεταξύ των 4 ομάδων είναι μεγαλύτερη από την μέση τυχαία διακύμανση, δηλ. αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε οι διαφορές μεταξύ των 4 ομάδων δεν είναι τυχαίες (είναι πραγματικές)**
- Σε αυτή την περίπτωση, η τιμή του *F – test* γίνεται πολύ μεγαλύτερη του 1



Σημαντικότητα

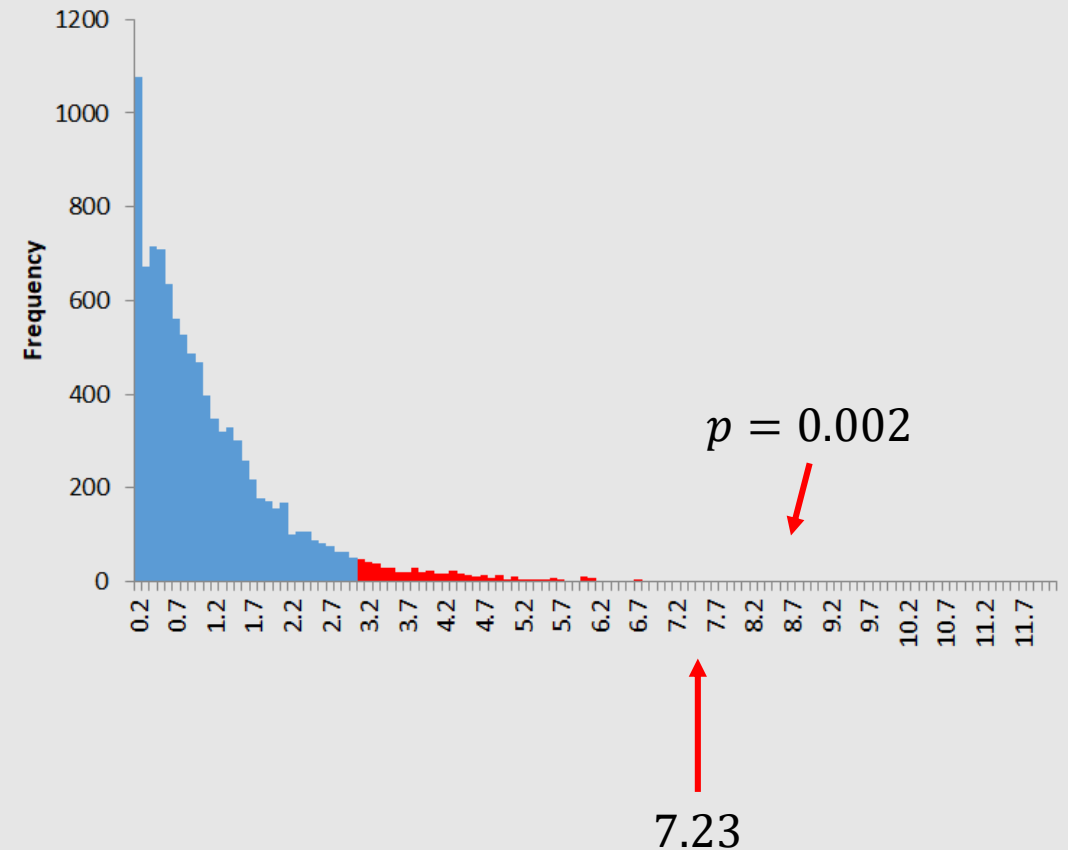
- Η σημαντικότητα της τιμής $F = 7.23$ προσδιορίζεται με παρόμοιο τρόπο με το $t - test$
- Προσομοιώνουμε τυχαία 10000 φορές την μελέτη και υπολογίζουμε κάθε φορά το F-test. Τότε τα 10000 $F - tests$ σχηματίζουν την $F -$ κατανομή
- Μετά βρίσκουμε το ποσοστό των $F - tests$ που είναι μεγαλύτερα από το $F = 7.23$





Σημαντικότητα

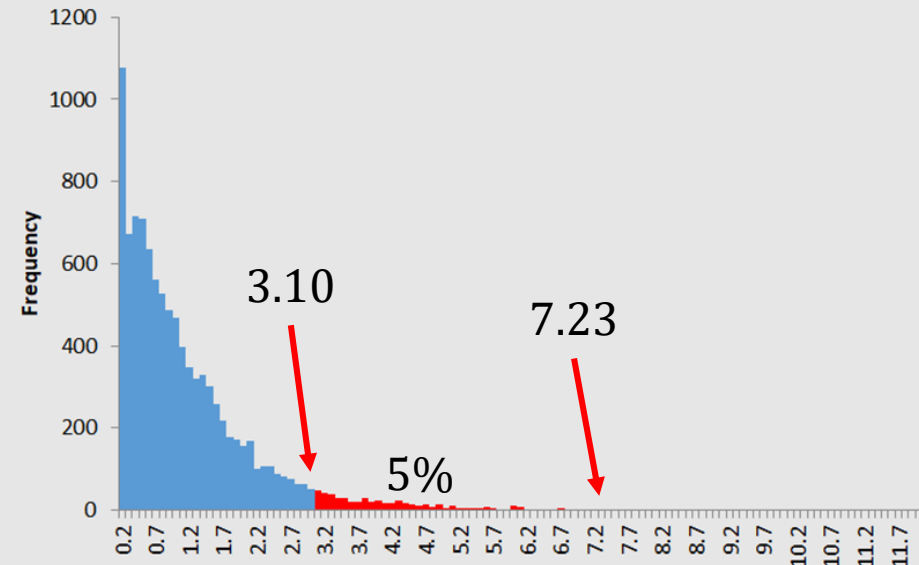
- Το ποσοστό των F-tests που είναι μεγαλύτερα από το $F = 7.23$ είναι $P = 0.002$
- Συνεπώς, οι 4 δίαιτες διαφέρουν μεταξύ τους σημαντικά (με μία μικρή πιθανότητα λάθους $P < 0.05$ ή $P = 0.002$)





F – test

- Εναλλακτικά, η τιμή $F = 7.23$ συγκρίνεται με 5% σημείο της F-κατανομής με 3 και 20 df που είναι 3.1 (πίνακας F-κατανομής στην επόμενη διαφάνεια).
- Επειδή το $F = 7.23$ είναι μεγαλύτερο από το 3.1 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένδειξη ($P < 0.05$) ότι οι ομάδες (δίαιτες) διαφέρουν μεταξύ τους



Εύρεση του 5% σημείου της F κατανομής για 3 και 20 df στο Excel

```
=F.INV.RT(0.05, 3, 20)
```

```
3.098391
```

Πίνακας f – κατανομής

Degrees of freedom in denominator	Degrees of freedom in numerator												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	∞
1	161.40	199.50	215.70	224.60	230.20	234.00	236.80	238.90	240.50	241.90	248.00	251.10	254.30
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.45	19.47	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.66	8.59	8.50
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.80	5.72	5.60
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.56	4.46	4.40
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.87	3.77	3.70
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.44	3.34	3.20
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.15	3.04	2.90
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	2.94	2.83	2.70
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.77	2.66	2.50
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.65	2.53	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.54	2.43	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.46	2.34	2.20
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.39	2.27	2.10
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.33	2.20	2.10
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.28	2.15	2.00
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.23	2.10	2.00
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.19	2.06	1.90
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.16	2.03	1.90
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.12	1.99	1.80
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	1.93	1.79	1.60
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.84	1.69	1.50
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.66	1.50	1.30
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.57	1.39	1.00

One Way ANOVA

Post Hoc Test



Διαδικασίες πολλαπλών συγκρίσεων

- Η ANOVA μας λέει μόνο αν οι μέσες τιμές των πληθυσμών είναι ίσες (αν πιθανότητα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό)
- Αν το F-Test είναι σημαντικό, δεν γνωρίζουμε που ακριβώς βρίσκονται οι διαφορές
- Είναι απαραίτητο λοιπόν να κάνουμε επιμέρους συγκρίσεις μεταξύ των πληθυσμών:
 - A, B, C τα ζεύγη θα είναι AB, AC και BC ή $C(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times (1 \times 2)} = \frac{6}{2} = 3$ ζεύγη
 - A, B, C, D τα ζεύγη θα είναι AB, AC, AD, BC, BD και CD ή $C(4, 2) = 6$ ζεύγη
- Υπάρχουν πολλές διαδικασίες πολλαπλών ελέγχων: Fisher's, LSD, Tukey HSD, Bonferroni



Διαδικασίες πολλαπλών συγκρίσεων

	Ομάδες / Δίαιτες			
	a	b	c	d
Μέση τιμή	3.80	3.41	3.60	3.94
Τυπική απόκλιση	0.27	0.15	0.17	0.22
Μέγεθος	6	6	6	6

ANOVA						
Source of Variation	SS	df	MS	F	P-value	F crit
Between Groups	0.954145833	3	0.318048611	7.219763035	0.001805552	3.098391212
Within Groups	0.88105	20	0.0440525			
Total	1.835195833	23				



Πίνακας διαφορών

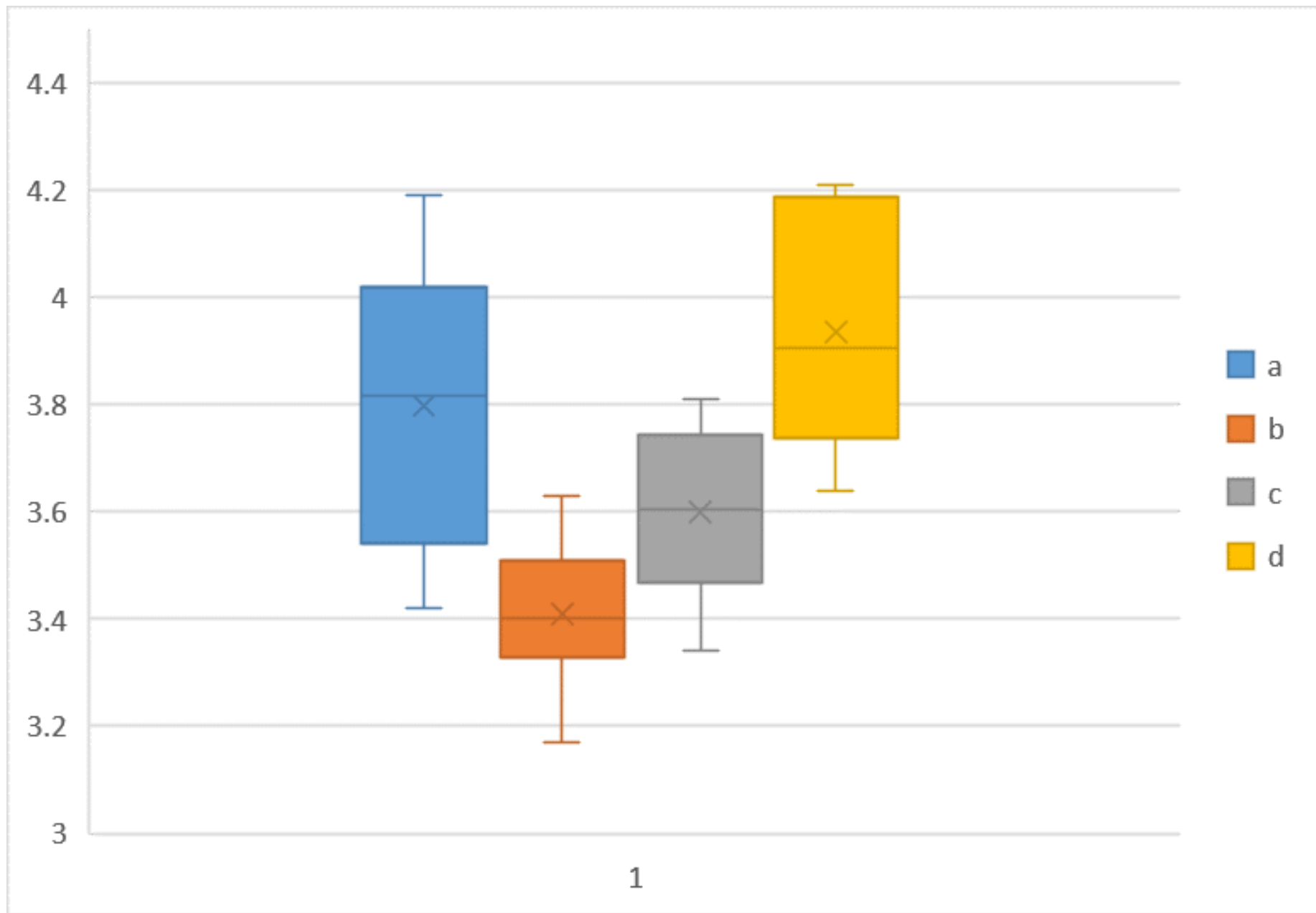
	d	a	c	b
d	0	0.14	0.34	0.53
a	-0.14	0	0.2	0.39
c	-0.34	-0.2	0	0.19
b	-0.53	-0.39	-0.19	0



Έξι έλεγχοι ζευγών

	Μέση τιμή #1	Μέση τιμή #2	Διαφορά
a vs b	3.80	3.41	0.39
a vs c	3.80	3.60	0.20
a vs d	3.80	3.94	-0.14
b vs c	3.41	3.60	-0.19
b vs d	3.41	3.94	-0.53
c vs d	3.60	3.94	-0.34

Ποια από αυτά τα ζεύγη συγκρίσεων περιέχει στατιστικά σημαντική διαφορά;





Έλεγχος Bonferroni

ANOVA						
Source of Variation	SS	df	MS	F	P-value	F crit
Between Groups	0.954145833	3	0.318048611	7.219763035	0.001805552	3.098391212
Within Groups	0.88105	20	0.0440525			
Total	1.835195833	23				

$$H_0: \mu_i = \mu_j$$
$$H_\alpha: \mu_i \neq \mu_j$$
$$t = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}}$$
$$SE = \sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$



a vs b

$$t = \frac{3.80 - 3.41}{\sqrt{0.044 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right)}}$$

$$t = \frac{0.39}{0.1225}$$

$$t = 3.1837$$

$$t = \frac{0.39}{\sqrt{0.044(0.33)}}$$

20 degrees of freedom

$$t = \frac{0.39}{\sqrt{0.015}}$$

$$= \mathbf{T.DIST.2T(3.1837, 20) = 0.004667}$$



a vs b

$$t = 3.1837 \quad =\text{T.DIST.2T}(3.1837, 20)=0.004667$$

- Η τιμή του $t - test$ ($t = 3.1837$) είναι μεγαλύτερη από το 5% σημείο της $t - κατανομής$ για 20 df (οι df του error) που είναι 2.09
- **Συνεπώς, υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των ομάδων a και b ($p < 0.05$ ή πιο συγκεκριμένα $p = 0.004$)**



95% διάστημα εμπιστοσύνης για μέση τιμή των διαφορών

$$((\bar{x}_a - \bar{x}_b) - t \times SE, D + t \times SE)$$

$$((3.80 - 3.41) - 2.09 \times 0.12, (3.80 - 3.41) + 2.09 \times 0.12)$$

$$(0.39 - 0.251, 0.39 + 0.251)$$

$$(0.139, 0.641)$$

Οπότε, με 95% βεβαιότητα η ομάδα a έχει μεγαλύτερο βάρος μεταξύ 0.14 και 0.64 από ότι η ομάδα b. Επειδή το 0 δεν συμπεριλαμβάνεται μέσα στο 95% CI, σημαίνει ότι η διαφορά είναι σημαντική

	t distribution		
	Percentage points of the t distribution		
	p-value		
degrees of freedom	0.05	0.01	0.001
	two tails	two tails	two tails
1	12.71	63.66	636.62
2	4.30	9.92	31.60
3	3.18	5.84	12.92
4	2.78	4.60	8.61
5	2.57	4.03	6.87
6	2.45	3.71	5.96
7	2.36	3.50	5.41
8	2.31	3.36	5.04
9	2.26	3.25	4.78
10	2.23	3.17	4.59
20	2.09	2.85	3.85



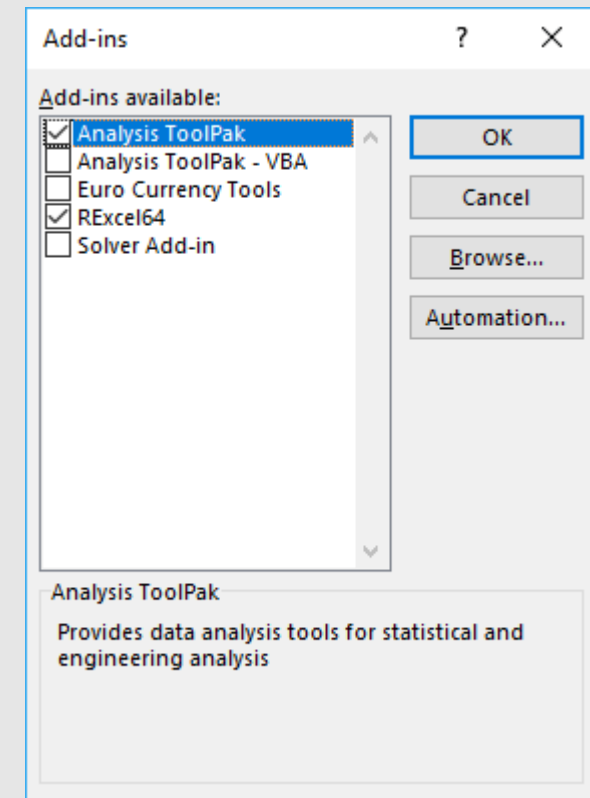
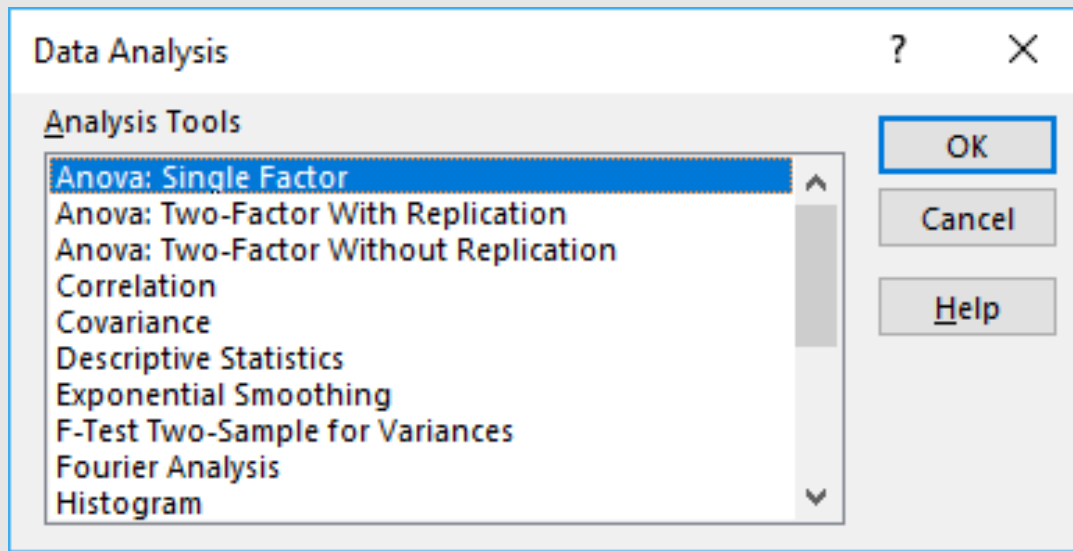
Διόρθωση Bonferroni

- Όλες οι πιθανές συγκρίσεις μεταξύ των ομάδων δεν είναι ανεξάρτητες και υπάρχει πάντα πιθανότητα να βρούμε ένα εσφαλμένο σημαντικό αποτέλεσμα
- Για τον λόγο αυτό όταν γίνονται πολλαπλές συγκρίσεις (k) μεταξύ ομάδων η στάθμη σημαντικότητας (P) πρέπει να διορθώνεται σε $P' = k * P$
- Συνεπώς, αν εκτελέσουμε 6 συγκρίσεις μεταξύ ομάδων, η σύγκριση μεταξύ της δίαιτας a και b θα είναι σημαντική σε $P = 6 * 0.004667 = 0.028$



Excel Data Analysis

File -> Options -> Add Ins -> Go ... -> Analysis ToolPak





Excel Data Analysis

Data -> Data Analysis

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	b	c	d					
2	3.42	3.17	3.34	3.64					
3	3.96	3.63	3.72	3.93					
4	3.87	3.38	3.81	3.77					
5	4.19	3.47	3.66	4.18					
6	3.58	3.39	3.55	4.21					
7	3.76	3.41	3.51	3.88					
8									
9									
10									
11									
12									

Data Analysis

Analysis Tools

- Anova: Single Factor
- Anova: Two-Factor With Replication
- Anova: Two-Factor Without Replication
- Correlation
- Covariance
- Descriptive Statistics
- Exponential Smoothing
- F-Test Two-Sample for Variances
- Fourier Analysis
- Histogram

OK Cancel Help



Excel Data Analysis

	A	B	C	D
1	a	b	c	d
2	3.42	3.17	3.34	3.64
3	3.96	3.63	3.72	3.93
4	3.87	3.38	3.81	3.77
5	4.19	3.47	3.66	4.18
6	3.58	3.39	3.55	4.21
7	3.76	3.41	3.51	3.88
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Anova: Single Factor

Input
Input Range:

Grouped By: Columns Rows

Labels in first row
Alpha:

Output options
 Output Range:
 New Worksheet Ply:
 New Workbook

OK Cancel Help



Excel Data Analysis

9	Anova: Single Factor						
10							
11	SUMMARY						
12	<i>Groups</i>	<i>Count</i>	<i>Sum</i>	<i>Average</i>	<i>Variance</i>		
13	a	6	22.78	3.79666667	0.07538667		
14	b	6	20.45	3.40833333	0.02217667		
15	c	6	21.59	3.59833333	0.02805667		
16	d	6	23.61	3.935	0.05059		
17							
18							
19	ANOVA						
20	<i>Source of Variation</i>	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>P-value</i>	<i>F crit</i>
21	Between Groups	0.95414583	3	0.31804861	7.21976304	0.00180555	3.09839121
22	Within Groups	0.88105	20	0.0440525			
23							
24	Total	1.83519583	23				