Probabilities

Πιθανότητες

Ζιντζαράς Ηλίας, M.Sc., Ph.D.

Καθηγητής Βιομαθηματικών-Βιομετρίας
Εργαστήριο Βιομαθηματικών
Τμήμα Ιατρικής
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Institute for Clinical Research and Health Policy Studies
Tufts University School of Medicine
Boston, MA, USA

Θεόδωρος Μπρότσης, MSc, PhD
Εντεταλμένος Διδάσκων
(http://biomath.med.uth.gr)
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Email: tmprotsis@uth.gr

Έννοια

Δεν υπάρχει ολοκληρωμένη και ικανοποιητική εξήγηση της έννοιας της πιθανότητας (P) όμως στην καθημερινή μας ζωή όπως και στην ιατρική τον όρο των χρησιμοποιούμε συχνά

Παράδειγμα

- Το αποτέλεσμα μίας θεραπείας με ένα αντιβιοτικό είναι ότι η λοίμωξη έχει θεραπευθεί ή δεν έχει θεραπευθεί σε διάστημα 5 ημερών. Ένας παθολόγος παρατήρησε ότι 3 στους 4 ασθενείς έχουν θεραπευθεί

- Τότε, για τον παθολόγο αυτόν η πιθανότητα ότι ένας ασθενής θα θεραπευτεί όταν του χορηγηθεί το αντιβιοτικό είναι 0.75 ή 75%

- Όμως, ένας μεγαλύτερος αριθμός ασθενών θα μπορούσε να δώσει μία καλύτερη εκτίμηση της πιθανότητας θεραπείας

Ορισμός

Η πιθανότητα ενός γεγονότος ορίζεται ως η αναλογία ή το ποσοστό που συμβαίνει το γεγονός αυτό σε μια μεγάλη σειρά παρατηρήσεων

Παράδειγμα

- Για παράδειγμα, αν μεταξύ $100{,}000$ νεογέννητων $51{,}000$ ήταν κορίτσια, η πιθανότητα ένα νεογέννητο να είναι κορίτσι παριστάνεται από το κλάσμα $51{,}000/100{,}000 \; = \; 0.51$, δηλ. $P(κοριτσι) = 0.51$

- Όμοια, η πιθανότητα να είναι αγόρι είναι 0.49, δηλ. $P(αγόρι) = 0.49$

Ορισμός

Πιθανότητα=(αριθμός επιτυχόντων γεγονότων)/(αριθμό όλων των δυνατών γεγονότων)

Παράδειγμα

- Η πιθανότητα να τραβήξεις μία κούπα ♥ από μία τράπουλα είναι
- $P(κούπα) = 13/52 = 1/4$
- Τα πιθανά γεγονότα είναι 52 (σύνολο χαρτιών στην τράπουλα) και 13 από αυτά θεωρούνται επιτυχία, δηλ. όλες οι κούπες

Ιδιότητες

- Η τιμή μιας πιθανότητας κυμαίνεται από **0 έως 1**
- Ένα γεγονός με πιθανότητα 0 δεν μπορεί να συμβεί, ενώ ένα γεγονός με πιθανότητα 1 θα συμβεί σίγουρα
- Όσο πιο μεγάλη είναι η πιθανότητα ενός γεγονότος τόσο πιο δυνατόν είναι να συμβεί αυτό
- Ένα γεγονός με πιθανότητα 1/5 ή 0.20 σημαίνει ότι είναι δυνατόν να συμβεί 1 στις 5

Ορισμοί και ιδιότητες

- Η πιθανότητα να παρατηρήσουμε το γεγονός A συμβολίζεται με $\mathrm{P(A)}$, τότε $0 \ \leq \ P(A) \ \leq 1$

- Αν τα γεγονότα A, B, C,… αλληλοαναιρούνται (mutually exclusive), δηλ. δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα (όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε ταυτόχρονα και κορώνα και γράμματα), τότε
$$P(A \ or \ B \ or \ C \ \ldots) \ = \ P(A) + P(B) + P(C) + \cdots$$

Παράδειγμα

- Στην παραγωγή φαρμάκων, μεταξύ 1,000,000 δισκίων μιας παρτίδας, 50,000 είναι γνωστό ότι είναι ελαττωματικά, ίσως να περιέχουν κηλίδες βρωμιάς

- Έτσι, η πιθανότητα να επιλεχθεί τυχαία ένα δισκίο με κηλίδες βρωμιάς είναι

$$P(κηλιδες\ βρωμιας) = 50{,}000/1{,}000.000 = 0.05\ (5\%)$$

- Επίσης, 30,000 έχουν χτυπημένες άκρες και 40,000 ξεθωριασμένα

- Αν αυτά τα δύο ελαττώματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, έχουμε

$$P(χτυπημενες\ άκρες) = 30{,}000/1{,}000{,}000 = 0.03\ (3\%)$$

και

$$P(ξεθωριασμενα) = 40{,}000/1{,}000{,}000 = 0.04\ (4\%)$$

Παράδειγμα

Η πιθανότητα επιλογής ενός μη αποδεκτού δισκίου (με κηλίδες βρωμιάς, θρυμματισμένα ή ξεθωριασμένα) στην τύχη είναι

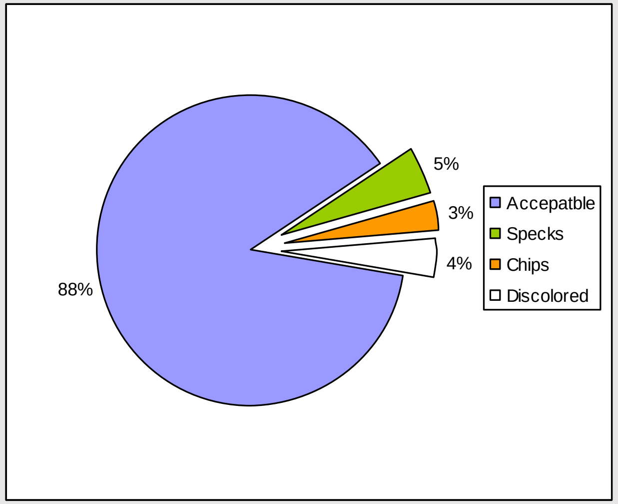
$P(\mu\eta\ \alpha\pi o\delta\epsilon\kappa\tau ó) =$

$P(\kappa\eta\lambda\iota\delta\epsilon\varsigma\ \beta\rho\omega\mu\iota\alpha\varsigma\ ή\ \theta\rho\upsilon\mu\mu\alpha\tau\iota\sigma\mu\epsilon\nu\alpha\ ή\ \xi\epsilon\theta\omega\rho\iota\alpha\sigma\mu\epsilon\nu\alpha) =$

$P(\kappa\eta\lambda\iota\delta\epsilon\varsigma\ \beta\rho\omega\mu\iota\alpha\varsigma) + P(\theta\rho\upsilon\mu\mu\alpha\tau\iota\sigma\mu\epsilon\nu\alpha) + P(\xi\epsilon\theta\omega\rho\iota\alpha\sigma\mu\epsilon\nu\alpha) =$

$0.05 + 0.03 + 0.04$

$\mathbf{0.12}$



Γεγονότα που αλληλοαναιρούνται

Αν τα γεγονότα A, B, C,… αλληλοαναιρούνται και καλύπτουν όλες τις πιθανές εκδοχές, τότε

$$P(A) + P(B) + P(C) + \cdots = 1$$

Παράδειγμα: Στο παράδειγμα με τα χαρακτηριστικά των δισκίων έχουμε:

$$P(αποδεκτό) + P(μη\ αποδεκτό) = 1$$

Έτσι, η πιθανότητα να επιλεγεί τυχαία ένα αποδεκτό δισκίο είναι

$$P(αποδεκτό) = 1 - 0.12 = 0.88$$

Γεγονότα που αλληλοαναιρούνται

Χαρακτηριστικά δισκίων	Αποδεκτά	Κηλίδες βρωμιάς	Θρυμματισμένα	Ξεθωριασμένα	Σύνολο
Πιθανότητα	0.88	0.05	0.03	0.04	1.00

Γεγονότα που δεν αλληλοαναιρούνται

Αν δύο γεγονότα Α και Β δεν αλληλοαναιρούνται, τότε

$$P(A\ ή\ B) = P(A) + P(B) - P(A\ και\ B)$$

$(\mathrm{A}\ ή\ B)$ σημαίνει ότι συμβαίνει το Α ή το Β

$(A\ και\ B)$ σημαίνει ότι τα Α και Β συμβαίνουν ταυτόχρονα

Αν τα Α και Β αλληλοαναιρούνται (mutually exclusive), τότε

$$P(A\ και\ B) = 0$$

Παράδειγμα

Στο παράδειγμα των δισκίων, μερικά θρυμματισμένα δισκία μπορεί να έχουν επίσης κηλίδες βρωμιάς:

20,000 (2%) δισκία είναι θρυμματισμένα καθώς επίσης μπορεί να έχουν και κηλίδες βρωμιάς

$P(κηλιδες\ βρωμιας\ ή\ θρυμματισμενα)\ =$

$P(κηλιδες\ βρωμιας) + P(θρυμματισενα) - P(κηλιδες\ βρωμιας\ και\ θρυμματισμενα)\ =$

$0.05 + 0.03 - 0.02$

$\mathbf{0.06}$

Έτσι η πιθανότητα να βρεθεί ένα θρυμματισμένο ή ένα με κηλίδες βρωμιάς δισκίο είναι 0.06

Δηλ., αναμένονται 60,000 δισκία να είναι θρυμματισμένα ή με κηλίδες βρωμιάς

Δεσμευμένη πιθανότητα

Η δεσμευμένη (ή η υπό συνθήκη) πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός A με τη συνθήκη ότι ένα άλλο γεγονός B έχει ήδη συμβεί $\{P(\mathrm{A|B})\}$ δίνεται από τον τύπο

$$P(\mathrm{A|B}) = P(A\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{B})/P(\mathrm{B})$$

Τότε, η πιθανότητα να συμβούν και τα δύο γεγονότα (A και B) είναι

$$P(A\ \kappa\alpha\iota\ B) = P(B)P(\mathrm{A|B})$$

Στο παράδειγμα των δισκίων, η πιθανότητα ένα δισκίο να έχει κηλίδες βρωμιάς ενώ είναι ήδη θρυμματισμένο είναι

$P(\kappa\eta\lambda\iota\delta\varepsilon\varsigma\ \beta\rho\omega\mu\iota\alpha\varsigma|\theta\rho\upsilon\mu\mu\alpha\tau\iota\sigma\mu\varepsilon\nu o) =$

$P(\kappa\eta\lambda\iota\delta\varepsilon\varsigma\ \beta\rho\omega\mu\iota\alpha\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \theta\rho\upsilon\mu\mu\alpha\tau\iota\sigma\mu\varepsilon\nu o)/P(\kappa\eta\lambda\iota\delta\varepsilon\varsigma\ \beta\rho\omega\mu\iota\alpha\varsigma)\ =$

$0.02/0.03 =$

$2/3$

Ανεξάρτητα γεγονότα

Η πιθανότητα να συμβούν μαζί δύο γεγονότα (Α και Β) όταν αυτά είναι ανεξάρτητα (δηλ. το αποτέλεσμα του ενός γεγονότος δεν επηρεάζει το άλλο γεγονός) δίνεται από το γινόμενο των επιμέρους πιθανοτήτων, δηλαδή

$$P(A\ \kappa\alpha\iota\ B) = P(A) \cdot P(B)$$

Παράδειγμα

Στο παράδειγμα των δισκίων, η πιθανότητα να επιλεγεί ένα αποδεκτό δισκίο Α ακολουθούμενο από ένα μη αποδεκτό δισκίο Β είναι

$P(\alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{o}\ \kappa\alpha\iota\ \mu\eta\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{o}) =$
$P(\alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{o})\ \cdot\ P(\mu\eta\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{o}) =$
$0.88 \cdot 0.12 = 0.106$

Η πιθανότητα να επιλεγούν δύο δισκία αποδεκτά είναι

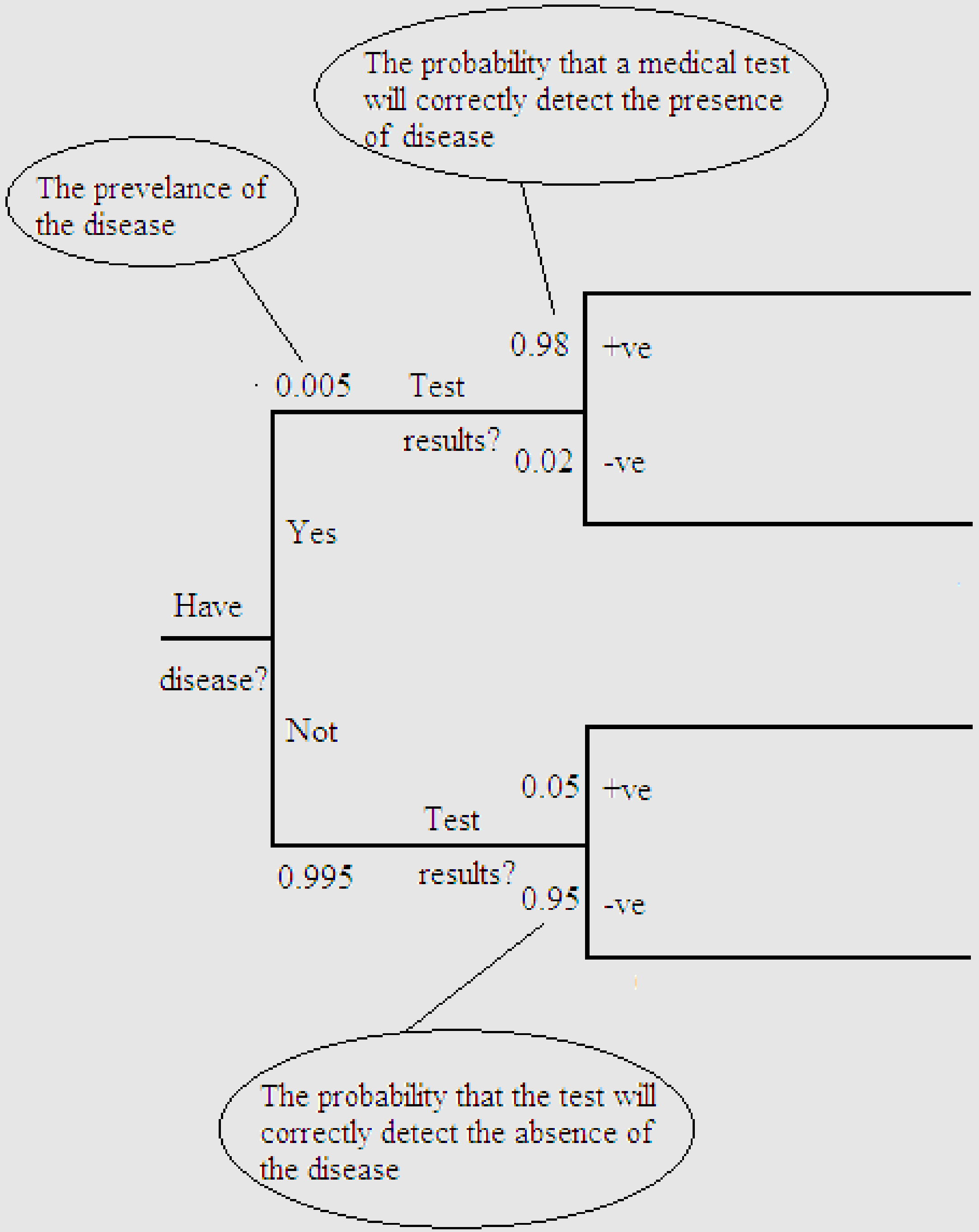
$P(\alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{o}\ \kappa\alpha\iota\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{o}) =$
$P(\alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{o}) \cdot P(\alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{o}) =$
$0.88 \cdot 0.88 = 0.7744$

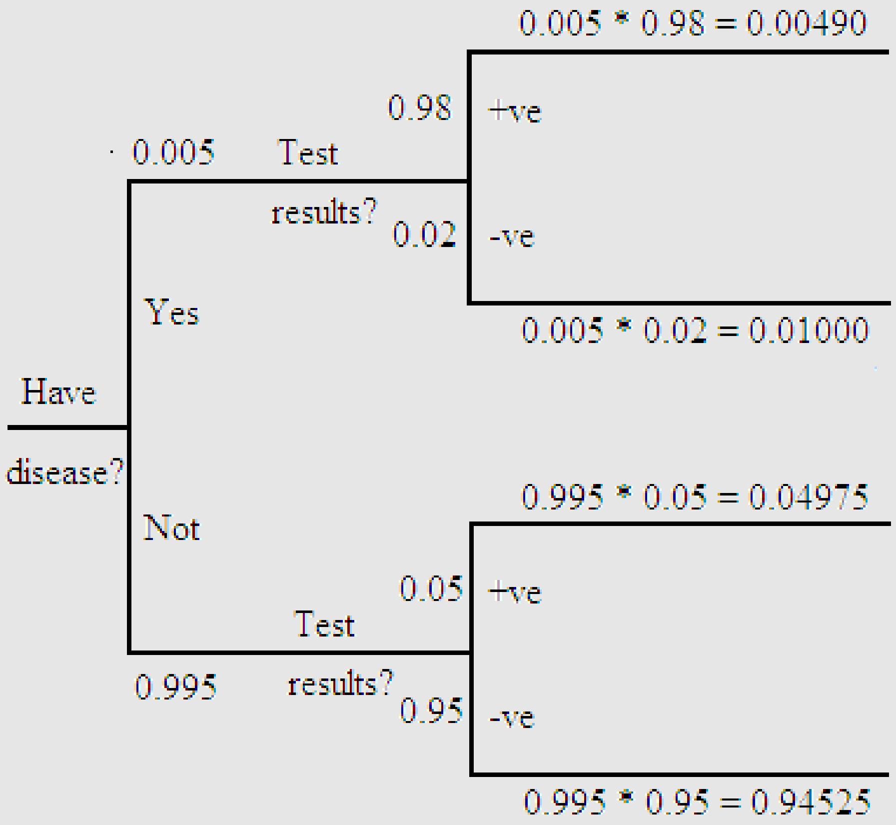
Δέντρα Πιθανοτήτων

Ένας χρήσιμος τρόπος αντιμετώπισης πολλών προβλημάτων πιθανοτήτων στην αποδεικτική ιατρική είναι ο σχεδιασμός ενός δέντρου πιθανοτήτων

Παράδειγμα

- Η πιθανότητα μια εξέταση να ανιχνεύσει σωστά την **παρουσία** μιας συγκεκριμένης ασθένειας είναι 98%
- Η πιθανότητα μια εξέταση να ανιχνεύσει σωστά την **απουσία** μιας συγκεκριμένης ασθένειας είναι 98%
- Η ασθένεια είναι αρκετά σπάνια, βρίσκεται μόνο στο **0.5%** του πληθυσμού
- Εάν έχουμε ένα θετικό αποτέλεσμα ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε πραγματικά τη νόσο;


The probability that a medical test will correctly detect the presence of disease
The prevelance of the disease
0.98
+ve
0.005
Test
results?
0.02
-ve
Yes
Have
disease?
Not
0.05
+ve
Test
results?
0.995
0.95
-ve
The probability that the test will correctly detect the absence of the disease

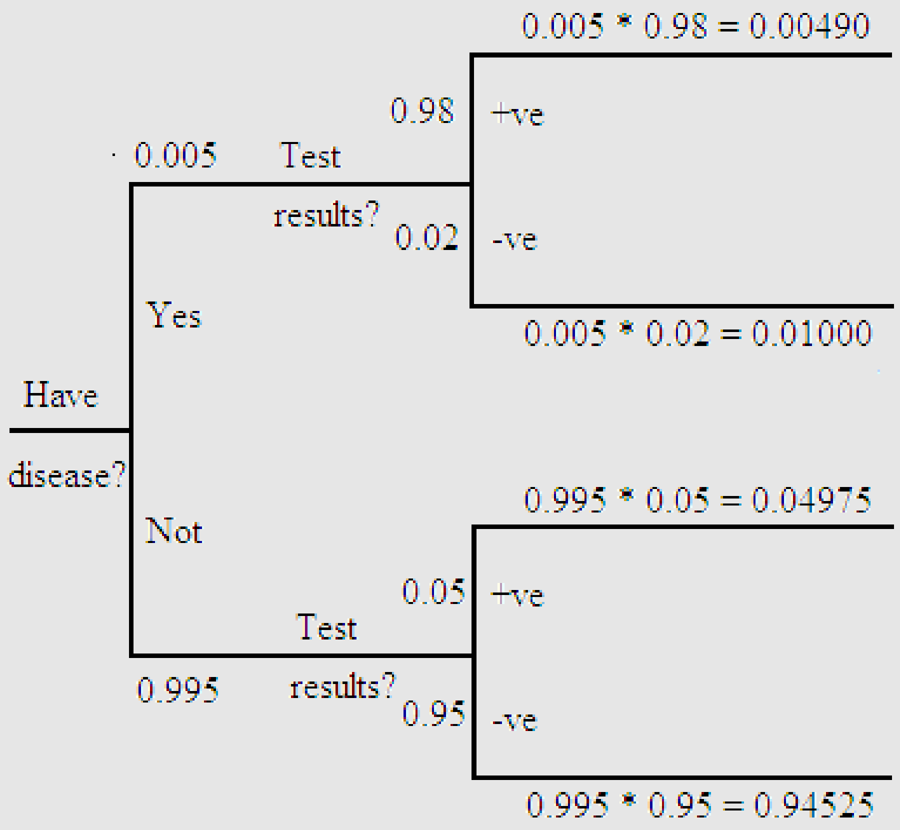


Η πιθανότητα νόησης με +ve test είναι 0.00490

Η πιθανότητα νόησης με -ve test είναι 0.01000

Η πιθανότητα μη νόησης με +ve test είναι 0.04975

Η πιθανότητα μη νόησης με -ve test είναι 0.94525



Η πιθανότητα θετικού τεστ είναι 0.00490 + 0.04975 = 0.05465

Η δεσμευμένη πιθανότητα εμφάνισης της νόσου, δεδομένου ότι το τεστ είναι θετικό, είναι

P(Diseased | +ve test) = P(Diseased και +ve test) / P(+ve test) = 0.00490/0.05465 = 9%