



Πιθανότητες

Ζιντζαράς Ηλίας, M.Sc., Ph.D.

*Καθηγητής Βιομαθηματικών-Βιομετρίας
Εργαστήριο Βιομαθηματικών
Τμήμα Ιατρικής
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας*

*Institute for Clinical Research and Health Policy Studies
Tufts University School of Medicine
Boston, MA, USA*

*Θεόδωρος Μπρότσης, MSc, PhD Candidate
Ακαδημαϊκός Υπότροφος
(<http://biomath.med.uth.gr>)
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Email: tmprotsis@uth.gr*



Έννοια

Δεν υπάρχει ολοκληρωμένη και ικανοποιητική εξήγηση της έννοιας της πιθανότητας (P) όμως στην καθημερινή μας ζωή όπως και στην ιατρική τον όρο των χρησιμοποιούμε συχνά



Παράδειγμα

- Το αποτέλεσμα μίας θεραπείας με ένα αντιβιοτικό είναι ότι η λοίμωξη έχει θεραπευθεί ή δεν έχει θεραπευθεί σε διάστημα 5 ημερών. Ένας παθολόγος παρατήρησε ότι 3 στους 4 ασθενείς έχουν θεραπευθεί
- Τότε, για τον παθολόγο αυτόν η πιθανότητα ότι ένας ασθενής θα θεραπευτεί όταν του χορηγηθεί το αντιβιοτικό είναι 0.75 ή 75%
- Όμως, ένας μεγαλύτερος αριθμός ασθενών θα μπορούσε να δώσει μία καλύτερη εκτίμηση της πιθανότητας θεραπείας



Ορισμός

Η πιθανότητα ενός γεγονότος ορίζεται ως η αναλογία ή το ποσοστό που συμβαίνει το γεγονός αυτό σε μια μεγάλη σειρά παρατηρήσεων



Παράδειγμα

- Για παράδειγμα, αν μεταξύ 100,000 νεογέννητων 51,000 ήταν κορίτσια, η πιθανότητα ένα νεογέννητο να είναι κορίτσι παριστάνεται από το κλάσμα $51,000/100,000 = 0.51$, δηλ. $P(\text{κοριτσι}) = 0.51$
- Όμοια, η πιθανότητα να είναι αγόρι είναι 0.49, δηλ. $P(\text{αγόρι}) = 0.49$



Ορισμός

Πιθανότητα=(αριθμός επιτυχόντων γεγονότων)/(αριθμό όλων των δυνατών γεγονότων)



Παράδειγμα

- Η πιθανότητα να τραβήξεις μία κούπα ♥ από μία τράπουλα είναι
- $P(\text{κούπα}) = 13/52 = 1/4$
- Τα πιθανά γεγονότα είναι 52 (σύνολο χαρτιών στην τράπουλα) και 13 από αυτά θεωρούνται επιτυχία, δηλ. όλες οι κούπες





Ιδιότητες

- Η τιμή μιας πιθανότητας κυμαίνεται από **0 έως 1**
- Ένα γεγονός με πιθανότητα 0 δεν μπορεί να συμβεί, ενώ ένα γεγονός με πιθανότητα 1 θα συμβεί σίγουρα
- Όσο πιο μεγάλη είναι η πιθανότητα ενός γεγονότος τόσο πιο δυνατόν είναι να συμβεί αυτό
- Ένα γεγονός με πιθανότητα $1/5$ ή 0.20 σημαίνει ότι είναι δυνατόν να συμβεί 1 στις 5



Ορισμοί και ιδιότητες

- Η πιθανότητα να παρατηρήσουμε το γεγονός A συμβολίζεται με $P(A)$, τότε $0 \leq P(A) \leq 1$
- Αν τα γεγονότα A, B, C, \dots αλληλοαναιρούνται (mutually exclusive), δηλ. δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα (όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε ταυτόχρονα και κορώνα και γράμματα), τότε

$$P(A \text{ or } B \text{ or } C \dots) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots$$



Παράδειγμα

- Στην παραγωγή φαρμάκων, μεταξύ 1,000,000 δισκίων μιας παρτίδας, 50,000 είναι γνωστό ότι είναι ελαττωματικά, ίσως να περιέχουν κηλίδες βρωμιάς
- Έτσι, η πιθανότητα να επιλεγθεί τυχαία ένα δισκίο με κηλίδες βρωμιάς είναι

$$P(\text{κηλιδες βρωμιας}) = 50,000/1,000.000 = 0.05 (5\%)$$

- Επίσης, 30,000 έχουν χτυπημένες άκρες και 40,000 ξεθωριασμένα
- Αν αυτά τα δύο ελαττώματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, έχουμε

$$P(\text{χτυπημενες άκρες}) = 30,000/1,000,000 = 0.03 (3\%)$$

και

$$P(\text{ξεθωριασμενα}) = 40,000/1,000,000 = 0.04 (4\%)$$



Παράδειγμα

Η πιθανότητα επιλογής ενός μη αποδεκτού δισκίου (με κηλίδες βρωμιάς, θρυμματισμένα ή ξεθωριασμένα) στην τύχη είναι

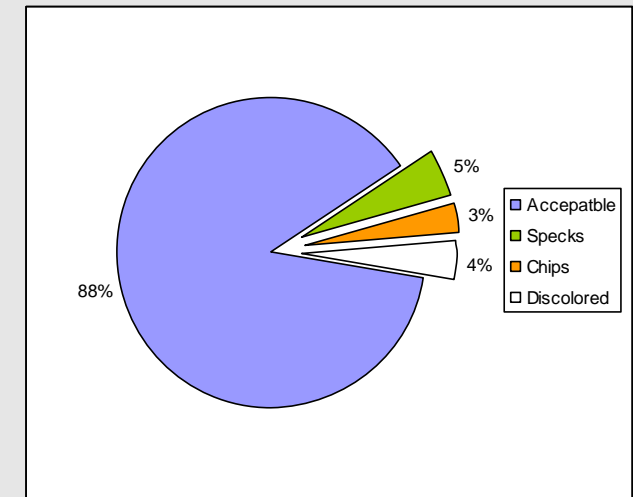
$$P(\text{μη αποδεκτό}) =$$

$$P(\text{κηλιδες βρωμιας ή θρυμματισμενα ή ξεθωριασμενα}) =$$

$$P(\text{κηλιδες βρωμιας}) + P(\text{θρυμματισμενα}) + P(\text{ξεθωριασμενα}) =$$

$$0.05 + 0.03 + 0.04$$

$$\mathbf{0.12}$$





Γεγονότα που αλληλοαναιρούνται

Αν τα γεγονότα A, B, C, \dots αλληλοαναιρούνται και καλύπτουν όλες τις πιθανές εκδοχές, τότε

$$P(A) + P(B) + P(C) + \dots = 1$$

Παράδειγμα: Στο παράδειγμα με τα χαρακτηριστικά των δισκίων έχουμε:

$$P(\text{αποδεκτό}) + P(\text{μη αποδεκτό}) = 1$$

Έτσι, η πιθανότητα να επιλεγεί τυχαία ένα αποδεκτό δισκίο είναι

$$P(\text{αποδεκτό}) = 1 - 0.12 = 0.88$$



Γεγονότα που αλληλοαναιρούνται

Χαρακτηριστικά δισκίων	Αποδεκτά	Κηλίδες βρωμιάς	Θρυμματισμένα	Ξεθωριασμένα	Σύνολο
Πιθανότητα	0.88	0.05	0.03	0.04	1.00



Γεγονότα που δεν αλληλοαναιρούνται

Αν δύο γεγονότα A και B δεν αλληλοαναιρούνται, τότε

$$P(A \text{ ή } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ και } B)$$

$(A \text{ ή } B)$ σημαίνει ότι συμβαίνει το A ή το B

$(A \text{ και } B)$ σημαίνει ότι τα A και B συμβαίνουν ταυτόχρονα

Αν τα A και B αλληλοαναιρούνται (mutually exclusive), τότε

$$P(A \text{ και } B) = 0$$



Παράδειγμα

Στο παράδειγμα των δισκίων, μερικά θρυμματισμένα δισκία μπορεί να έχουν επίσης κηλίδες βρωμιάς:

20,000 (2%) δισκία είναι θρυμματισμένα καθώς επίσης μπορεί να έχουν και κηλίδες βρωμιάς

$P(\text{κηλίδες βρωμιάς ή θρυμματισμένα}) =$

$P(\text{κηλίδες βρωμιάς}) + P(\text{θρυμματισμένα}) - P(\text{κηλίδες βρωμιάς και θρυμματισμένα}) =$

$0.05 + 0.03 - 0.02$

0.06

Έτσι η πιθανότητα να βρεθεί ένα θρυμματισμένο ή ένα με κηλίδες βρωμιάς δισκίο είναι 0.06

Δηλ., αναμένονται 60,000 δισκία να είναι θρυμματισμένα ή με κηλίδες βρωμιάς





Δεσμευμένη πιθανότητα

Η δεσμευμένη (ή η υπό συνθήκη) πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός A με τη συνθήκη ότι ένα άλλο γεγονός B έχει ήδη συμβεί $\{P(A|B)\}$ δίνεται από τον τύπο

$$P(A|B) = P(A \text{ και } B)/P(B)$$

Τότε, η πιθανότητα να συμβούν και τα δύο γεγονότα (A και B) είναι

$$P(A \text{ και } B) = P(B)P(A|B)$$

Στο παράδειγμα των δισκίων, η πιθανότητα ένα δισκίο να έχει κηλίδες βρωμιάς ενώ είναι ήδη θρυμματισμένο είναι

$$P(\text{κηλίδες βρωμιάς} | \text{θρυμματισμένο}) =$$

$$P(\text{κηλίδες βρωμιάς και θρυμματισμένο}) / P(\text{κηλίδες βρωμιάς}) =$$

$$0.02 / 0.03 =$$

$$2/3$$



Ανεξάρτητα γεγονότα

Η πιθανότητα να συμβούν μαζί δύο γεγονότα (A και B) όταν αυτά είναι ανεξάρτητα (δηλ. το αποτέλεσμα του ενός γεγονότος δεν επηρεάζει το άλλο γεγονός) δίνεται από το γινόμενο των επιμέρους πιθανοτήτων, δηλαδή

$$P(A \text{ και } B) = P(A) \cdot P(B)$$



Παράδειγμα

Στο παράδειγμα των δισκίων, η πιθανότητα να επιλεγεί ένα αποδεκτό δισκίο A ακολουθούμενο από ένα μη αποδεκτό δισκίο B είναι

$$\begin{aligned}P(\text{αποδεκτό και μη αποδεκτό}) &= \\P(\text{αποδεκτό}) \cdot P(\text{μη αποδεκτό}) &= \\0.88 \cdot 0.12 &= 0.106\end{aligned}$$

Η πιθανότητα να επιλεγούν δύο δισκία αποδεκτά είναι

$$\begin{aligned}P(\text{αποδεκτό και αποδεκτό}) &= \\P(\text{αποδεκτό}) \cdot P(\text{αποδεκτό}) &= \\0.88 \cdot 0.88 &= 0.7744\end{aligned}$$