



Two-Way ANOVA without interaction

Ανάλυση διασποράς με δύο παράγοντες χωρίς αλληλεπίδραση

Ζιντζαράς Ηλίας, M.Sc., Ph.D.

Καθηγητής Βιομαθηματικών-Βιομετρίας

Εργαστήριο Βιομαθηματικών

Τμήμα Ιατρικής

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Institute for Clinical Research and Health Policy Studies

Tufts University School of Medicine

Boston, MA, USA

Θεόδωρος Μπρότσης, MSc, PhD Candidate

Ακαδημαϊκός Υπότροφος

(<http://biomath.med.uth.gr>)

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Email: tmprotsis@uth.gr



Πότε;

- Όταν υπάρχουν δύο πιθανοί γνωστοί παράγοντες που συνεισφέρουν στη μεταβλητότητα (διακύμανση) των δεδομένων
- Τότε ο έλεγχος της επίδρασης του κάθε παράγοντα γίνεται με την ανάλυση διασποράς με δύο παράγοντες (two-way ANOVA)
- Η ανάλυση γίνεται συνήθως με τη χρήση στατιστικού προγράμματος (SPSS, Excel)



Παράδειγμα

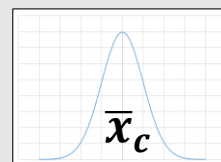
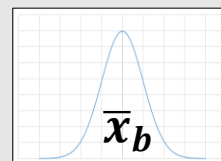
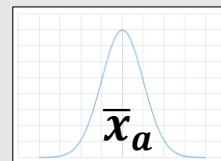
Σε ένα πείραμα για να συγκρίνουμε την επίδραση $k=3$ φαρμάκων στον αριθμό λεμφοκυττάρων σε ποντίκια, χρησιμοποιήθηκε ένας σχεδιασμός με 3 ποντίκια από $b=4$ διαφορετικά κλουβιά



Παράγοντες διακύμανσης

Υπάρχουν δύο πιθανοί παράγοντες διακύμανσης: το κλουβί και το φάρμακο

	Cages (κλουβιά)				
Drugs	1	2	3	4	Μέση τιμή
a	7.1	6.1	6.9	5.6	$\bar{x}_a = 6.43$
b	6.7	5.0	5.9	5.1	$\bar{x}_b = 5.68$
c	6.6	5.4	5.8	5.2	$\bar{x}_c = 5.75$



Συνολική μέση τιμή:

Η μέση τιμή όλων των τιμών είναι $\bar{\bar{x}} = 5.95$

Τι βλέπουμε με μία γρήγορη ματιά στις μέσες τιμές των γραμμών και σε σχέση με τη συνολική μέση τιμή;

Διακύμανση
φαρμάκων

	Cages (κλουβιά)				
Drugs	1	2	3	4	Μέση τιμή
a	7.1	6.1	6.9	5.6	$\bar{x}_a = 6.43$
b	6.7	5.0	5.9	5.1	$\bar{x}_b = 5.68$
c	6.6	5.4	5.8	5.2	$\bar{x}_c = 5.75$
	$\bar{x}_1 = 6.80$	$\bar{x}_2 = 5.50$	$\bar{x}_3 = 6.20$	$\bar{x}_4 = 5.30$	$\bar{\bar{x}} = 5.95$

Διακύμανση κλουβιών



Διαχωρισμός αθροίσματος τετραγώνων

One Way Anova

SST (sum of squares total)
(total / overall)

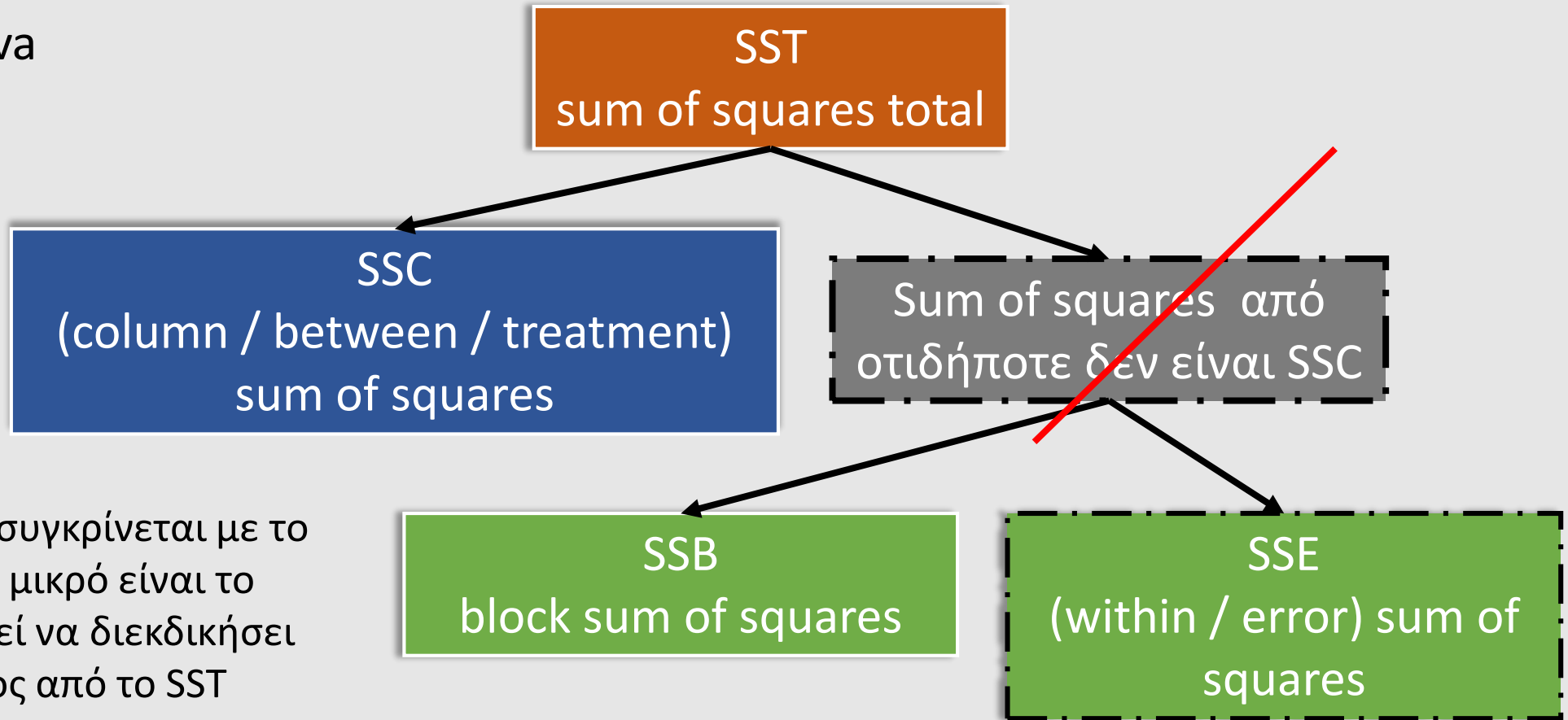
SSC
(column / between / treatment)
sum of squares

SSE
(within / error)
sum of squares



Αθροίσματα τετραγώνων

Two-Way Anova



Στο τέλος το SSC συγκρίνεται με το SSE. Έτσι όσο πιο μικρό είναι το SSE, το SSC μπορεί να διεκδικήσει μεγαλύτερο μέρος από το SST



Υπολογισμός του συνολικού αθροίσματος τετραγώνων

	A	B	C	D	E	F
1		Cages (κλουβιά)				
2	Drugs	1	2	3	4	
3	a	7.1	6.1	6.9	5.6	6.425
4	b	6.7	5	5.9	5.1	5.675
5	c	6.6	5.4	5.8	5.2	5.75
6		6.8	5.5	6.2	5.3	5.95

5.870

`=VAR.S(B3:E5)*(COUNT(B3:E5)-1)`

Υπολογισμός του συνολικού SS

1. Βρίσκουμε τις διαφορές ανάμεσα σε κάθε τιμή και την συνολική μέση τιμή
2. Υψώνουμε στη δύναμη του 2 τις διαφορές
3. Αθροίζουμε



Υπολογισμός του αθροίσματος τετραγώνων των κλουβιών

	A	B	C	D	E	F
1		Cages (κλουβιά)				
2	Drugs	1	2	3	4	
3	a	7.1	6.1	6.9	5.6	6.425
4	b	6.7	5	5.9	5.1	5.675
5	c	6.6	5.4	5.8	5.2	5.75
6		6.8	5.5	6.2	5.3	5.95
7		=AVERAGE(B3:B5)	=AVERAGE(C3:C5)	=AVERAGE(D3:D5)	=AVERAGE(E3:E5)	
8						
9		0.850	-0.450	0.250	-0.650	
10		=B6-\$F6	=C6-\$F6	=D6-\$F6	=E6-\$F6	
11						
12		0.722	0.203	0.063	0.423	
13		=POWER(B9,2)	=POWER(C9,2)	=POWER(D9,2)	=POWER(E9,2)	
14						
15		4.230				
16		=SUM(B12:E12)*3				

Υπολογισμός SS κλουβιών

1. Βρίσκουμε τις διαφορές ανάμεσα στη μέση τιμή των κλουβιών και την συνολική μέση τιμή
2. Υψώνουμε στη δύναμη του 2 τις διαφορές
3. Αθροίζουμε
4. Πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμό των φαρμάκων



Υπολογισμός του αθροίσματος τετραγώνων των φαρμάκων

	A	B	C	D	E	F
1		Cages (κλουβιά)				
2	Drugs	1	2	3	4	
3	a	7.1	6.1	6.9	5.6	6.425
4	b	6.7	5	5.9	5.1	5.675
5	c	6.6	5.4	5.8	5.2	5.75
6		6.8	5.5	6.2	5.3	5.95

1.365

=VAR.S(F3:F5)*2*4

Υπολογισμός SS Φαρμάκων

1. Βρίσκουμε τις διαφορές ανάμεσα στη μέση τιμή των φαρμάκων και την συνολική μέση τιμή
2. Υψώνουμε στη δύναμη του 2 τις διαφορές
3. Αθροίζουμε
4. Πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμό των κλουβιών



Άθροισμα τετραγώνων

$$SS \text{ Συνολικό} = SS \text{ Φάρμακα} + SS \text{ Κλουβιά} + SSE$$

$$SSE = SS \text{ Συνολικό} - SS \text{ Κλουβιά} - SS \text{ Φάρμακα}$$



Άθροισμα τετραγώνων

$$\text{SSE} = \text{SS Συνολικό} - \text{SS Κλουβιά} - \text{SS Φάρμακα}$$

$$\text{SSE} = 5.87 - 4.23 - 1.365$$

$$\text{SSE} = 0.275$$



Two-Way ANOVA χωρίς αλληλεπίδραση

Η two-way ANOVA παρουσιάζεται με τη μορφή του παρακάτω πίνακα:

Source of variation (Πηγή μεταβλητότητας)	df (Βαθμοί ελευθερίας)	SS (Sum of squares)
Between gaces	$4-1=3$	4.23
Between drugs	$3-1=2$	1.365
Error	$11-3-2=6$	0.275
Total	$12-1=11$ (N-1)	5.87

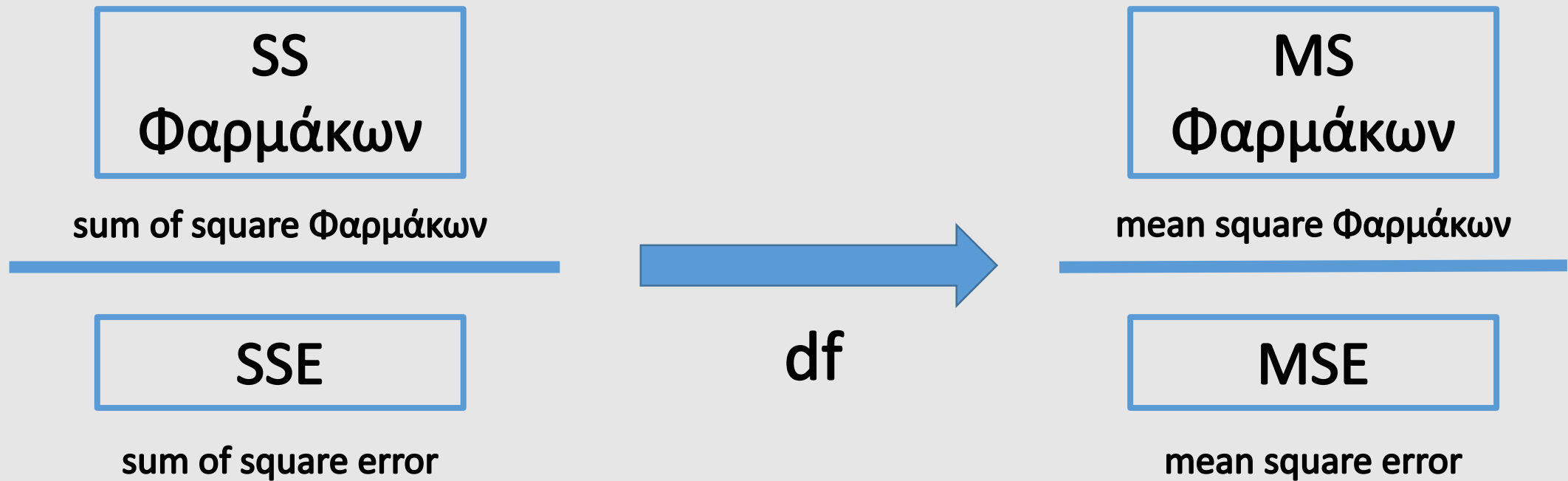
N = συνολικές παρατηρήσεις

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	5.595 ^a	5	1.119	24.415	.001
Intercept	424.830	1	424.830	9269.018	.000
drugs	1.365	2	.683	14.891	.005
gaces	4.230	3	1.410	30.764	.000
Error	.275	6	.046		
Total	430.700	12			
Corrected Total	5.870	11			



Two-Way ANOVA χωρίς αλληλεπίδραση

Μας ενδιαφέρει η σχέση ανάμεσα στη διακύμανση των φαρμάκων και στην διακύμανση του σφάλματος:





Two-Way ANOVA χωρίς αλληλεπίδραση

Μας ενδιαφέρει η σχέση ανάμεσα στη διακύμανση των φαρμάκων και στην διακύμανση του σφάλματος:

$$\frac{SS \text{ Φαρμάκων}}{df \text{ Φαρμάκων}} = \frac{SSE}{df \text{ Error}} = \frac{1.365}{2} = \frac{0.275}{6} = \frac{0.6825}{0.04583} = \frac{MS \text{ Φαρμάκων}}{MSE}$$

SS Φαρμάκων	1.365			
df Φαρμάκων	2		0.6825	MS Φαρμάκων
SSE	0.275		0.04583	MSE
df Error	6			



Two-Way ANOVA χωρίς αλληλεπίδραση

Η two-way ANOVA παρουσιάζεται με τη μορφή του παρακάτω πίνακα:

Source of variation (Πηγή μεταβλητότητας)	df (Βαθμοί ελευθερίας)	SS (Sum of squares)	MS=SS/df (Mean Squares)	F=MS/Error MS
Between cages	4-1=3	4.23	1.41	14.89
Between drugs	3-1=2	1.365	0.683	
Error	11-3-2=6	0.275	0.046	
Total	12-1=11 (N-1)	1.83		

N = συνολικές παρατηρήσεις

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	5.595 ^a	5	1.119	24.415	.001
Intercept	424.830	1	424.830	9269.018	.000
drugs	1.365	2	.683	14.891	.005
cages	4.230	3	1.410	30.764	.000
Error	.275	6	.046		
Total	430.700	12			
Corrected Total	5.870	11			

a. R Squared = .953 (Adjusted R Squared = .914)



F-Test

- Ελέγχουμε αν τα φάρμακα διαφέρουν μεταξύ τους συγκρίνοντας την τιμή $F = (\text{Between drugs MS}) / (\text{Error MS}) = 14.89$ με το 5% σημείο της F-κατανομής με 2 και 6 df (Between drugs df και Error df)
- Επειδή η τιμή του $F = 14.89$ είναι μεγαλύτερη από τη τιμή της F-κατανομής που είναι 5.14 (δες Πίνακα της F-κατανομής στο τέλος) τότε υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των φαρμάκων με (πιθανότητα λάθους) $P < 0.05$

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	5.595 ^a	5	1.119	24.415	.001
Intercept	424.830	1	424.830	9269.018	.000
drugs	1.365	2	.683	14.891	.005
gaces	4.230	3	1.410	30.764	.000
Error	.275	6	.046		
Total	430.700	12			
Corrected Total	5.870	11			

a. R Squared = .953 (Adjusted R Squared = .914)

Εύρεση του 5% σημείου της F κατανομής για 2 και 6 df στο Excel

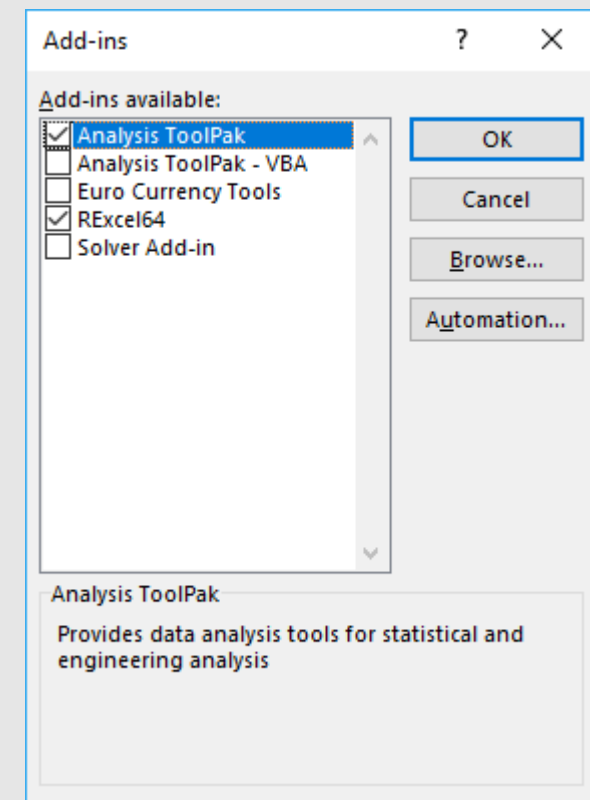
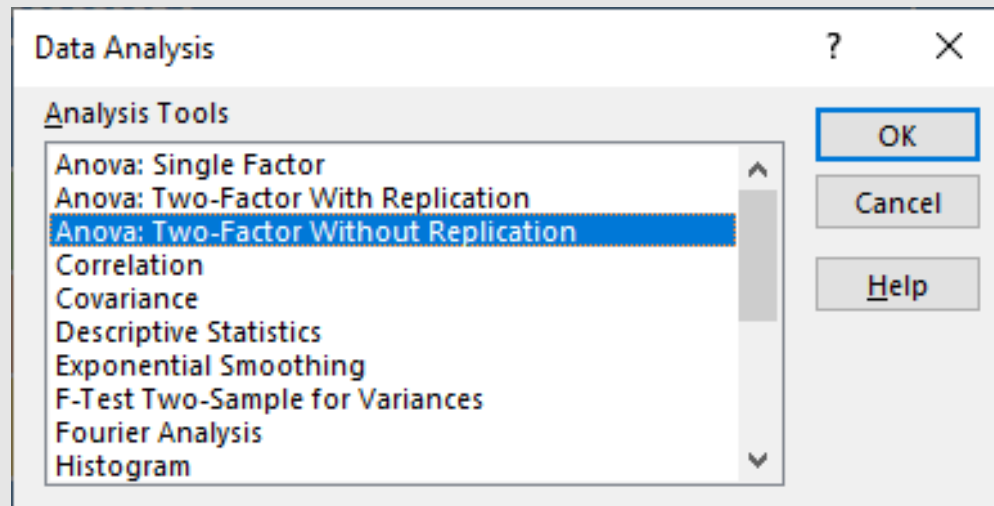
5.143
=F.INV.RT(0.05,2,6)



Excel Data Analysis

File -> Options -> Add Ins -> Go ... -> Analysis ToolPak

Data -> Data Analysis





Excel Data Analysis

Data -> Data Analysis

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Cages (κλουβιά)							
2	Drugs	1	2	3	4				
3	a	7.1	6.1	6.9	5.6				
4	b	6.7	5	5.9	5.1				
5	c	6.6	5.4	5.8	5.2				
6									
7									
8									
9									

Anova: Two-Factor Without Replication

Input
Input Range:

Labels
Alpha:

Output options
 Output Range:
 New Worksheet Ply:
 New Workbook

OK Cancel Help



Two-Way Anova

Source of variation (Πηγή μεταβλητότητας)	df (Βαθμοί ελευθερίας)	SS (Sum of squares)	MS=SS/df (Mean Squares)	F=MS/Error MS
Between gaces	4-1=3	4.23	1.41	
Between drugs	3-1=2	1.365	0.683	14.89
Error	11-3-2=6	0.275	0.046	
Total	12-1=11	1.83		

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	5.595 ^a	5	1.119	24.415	.001
Intercept	424.830	1	424.830	9269.018	.000
drugs	1.365	2	.683	14.891	.005
gaces	4.230	3	1.410	30.764	.000
Error	.275	6	.046		
Total	430.700	12			
Corrected Total	5.870	11			

a. R Squared = .953 (Adjusted R Squared = .914)

20	ANOVA						
21	<i>Source of Variation</i>	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>P-value</i>	<i>F crit</i>
22	Rows	1.365	2	0.6825	14.89090909	0.004714835	5.14325285
23	Columns	4.23	3	1.41	30.76363636	0.000486046	4.757062663
24	Error	0.275	6	0.045833333			
25							
26	Total	5.87	11				



two-way ANOVA with interaction

Ανάλυση διασποράς με δύο παράγοντες με αλληλεπίδραση

Ζιντζαράς Ηλίας, M.Sc., Ph.D.

Καθηγητής Βιομαθηματικών-Βιομετρίας

Εργαστήριο Βιομαθηματικών

Τμήμα Ιατρικής

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Institute for Clinical Research and Health Policy Studies

Tufts University School of Medicine

Boston, MA, USA

Θεόδωρος Μπρότσης, MSc, PhD Candidate

Ακαδημαϊκός Υπότροφος

(<http://biomath.med.uth.gr>)

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Email: tmprotsis@uth.gr



Two-Way Anova with interaction

- Όταν τα δεδομένα ταξινομούνται σε δύο παράγοντες
- Και υπάρχουν πολλαπλές παρατηρήσεις για κάθε συνδυασμό των δύο παραγόντων (replication)
- Τότε, ο έλεγχος της επίδρασης του κάθε παράγοντα (δηλ. της διαφοράς μεταξύ των επιπέδων του παράγοντα) ή της αλληλεπίδρασης μεταξύ των παραγόντων γίνεται με την ανάλυση διασποράς με δύο παράγοντες (two-way ANOVA with replication) με αλληλεπίδραση.



Παράδειγμα

Για να ερευνήσουμε την επίδραση του σορβικού οξέος (sa) και του pH του νερού στην επιβίωση της σαλμονέλας, χρησιμοποιήσαμε

- $w=3$ επίπεδα pH (5.0, 5.5, 6.0) και
- $s=2$ επίπεδα σορβικού οξέος (0, 100 p.p.m.).

Για τον κάθε συνδυασμό sa και pH υπάρχουν $k=3$ παρατηρήσεις.

Μία εβδομάδα μετά μετρήθηκε η ποσότητα σαλμονέλας που επιβίωσε ($\log(\text{πυκνότητα/ml})$).



Two-Way Anova with interaction

	ph		
sa	6.0	5.5	5.0
0	8.2	5.9	4.3
	8.4	6.0	4.3
	8.3	6.1	4.2
100	7.6	5.0	4.1
	7.8	5.3	4.4
	7.6	5.8	4.2



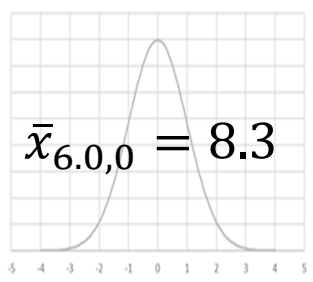
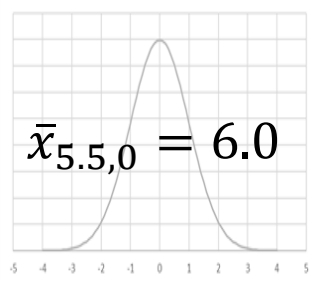
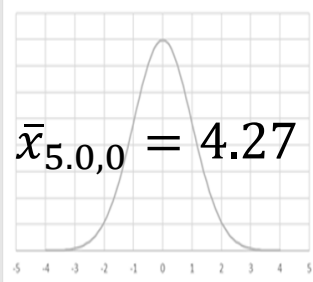
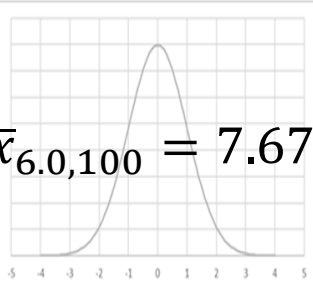
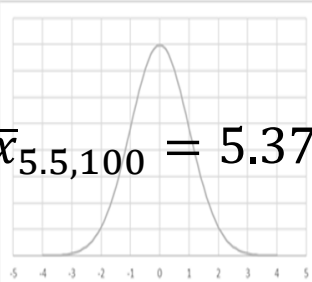
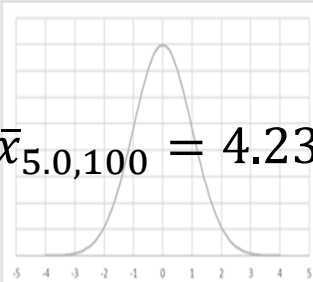
Two-Way Anova with interaction

	ph			
sa	6.0	5.5	5.0	Μέση τιμή
0	$\bar{x}_{6.0,0} = 8.3$	$\bar{x}_{5.5,0} = 6.0$	$\bar{x}_{5.0,0} = 4.27$	$\bar{x}_0 = 6.19$
100	$\bar{x}_{6.0,100} = 7.67$	$\bar{x}_{5.5,100} = 5.37$	$\bar{x}_{5.0,100} = 4.23$	$\bar{x}_{100} = 5.76$
	$\bar{x}_{6.0} = 7.99$	$\bar{x}_{5.5} = 5.69$	$\bar{x}_{5.0} = 4.25$	$\bar{\bar{x}} = 5.98$

Κάθε κυψέλη (cell) έχει τη δική της κατανομή (μέση τιμή, διακύμανση).

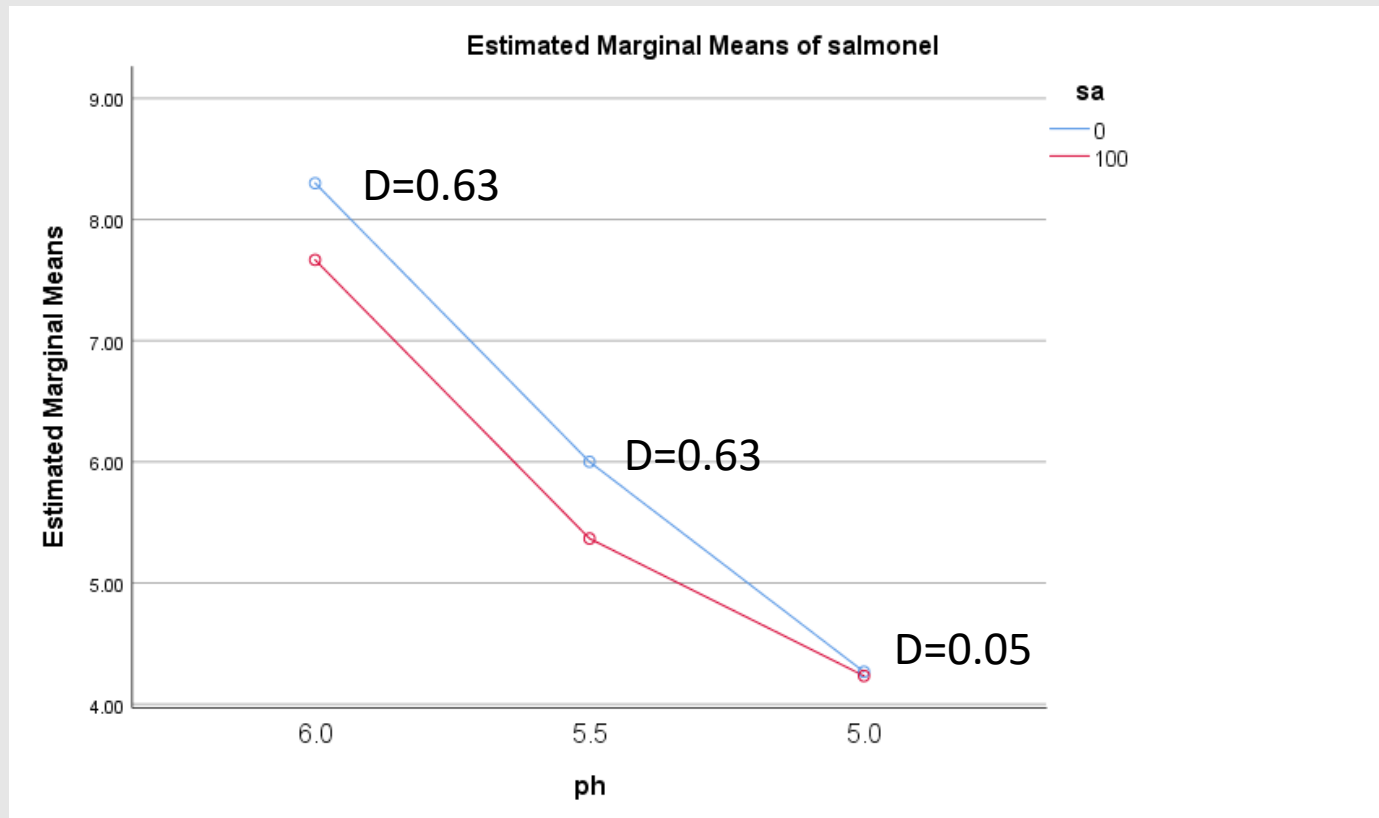


Two-Way Anova with interaction

	ph			
sa	6.0	5.5	5.0	Μέση τιμή
0	 $\bar{x}_{6.0,0} = 8.3$	 $\bar{x}_{5.5,0} = 6.0$	 $\bar{x}_{5.0,0} = 4.27$	$\bar{x}_0 = 6.19$
100	 $\bar{x}_{6.0,100} = 7.67$	 $\bar{x}_{5.5,100} = 5.37$	 $\bar{x}_{5.0,100} = 4.23$	$\bar{x}_{100} = 5.76$
	$\bar{x}_{6.0} = 7.99$	$\bar{x}_{5.5} = 5.69$	$\bar{x}_{5.0} = 4.25$	$\bar{\bar{x}} = 5.98$



Estimated Marginal Means

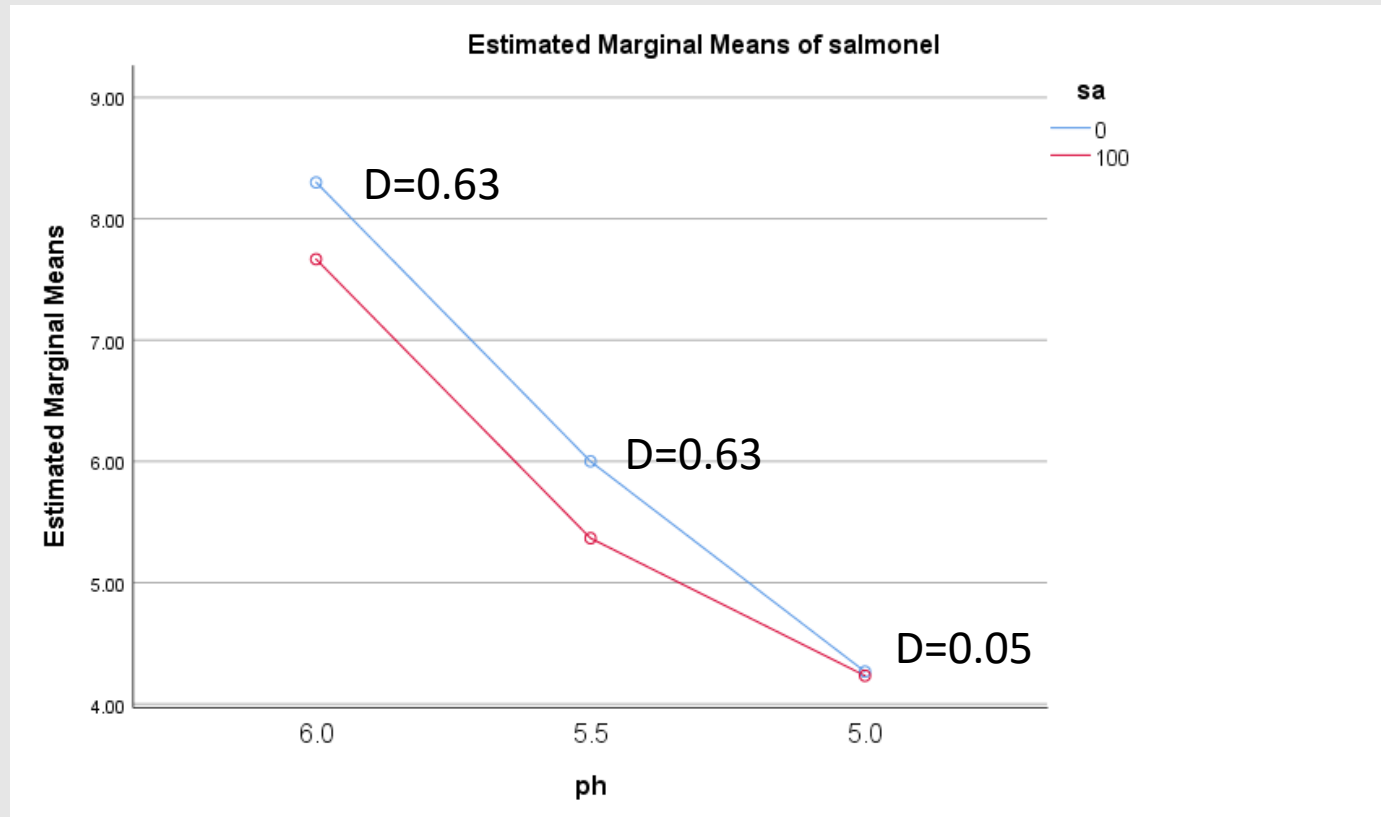


- Για επίπεδο pH 5.5 και 6.0 παρατηρούμε πως έχουμε μεγαλύτερη ποσότητα σαλμονέλας που επιβίωσε στο επίπεδο 0 του sa
- Για το επίπεδο όμως pH 5.0 παρατηρούμε πως δεν έχουμε διαφορά στην ποσότητα σαλμονέλας που επιβίωσε για τα δύο επίπεδα του sa

Τα δύο επίπεδα του sa αυξάνουν σταθερά την επιβίωση της σαλμονέλας σε όλα τα επίπεδα του pH;



Estimated Marginal Means



Η απάντηση είναι: ΌΧΙ

Αυτό το είδος της κατάστασης ονομάζεται **αλληλεπίδραση**

Η ύπαρξη της αλληλεπίδρασης σημαίνει ότι η διαφορά (D) $sa_0 - sa_{100}$ δεν είναι σταθερή

Αλληλεπίδραση σημαίνει επίσης ότι οι διαφορές (D) διαφέρουν μεταξύ τους

Σε ένα marginal means γράφημα, σαν γενικό κανόνα, κοιτάμε να δούμε αν οι γραμμές ενώνονται ή τείνουν να ενωθούν, οπότε υπάρχει αλληλεπίδραση στατιστικά σημαντική



Two-Way Anova with interaction

Η ANOVA παρουσιάζεται με τον εξής πίνακα:

Source of variation	df	SS	MS=SS/df	F=MS/s ²
pH	w-1=2	42.46	21.23	590
Sa	s-1=1	0.86	0.86	23.89
Interaction pH*sa	(w-1)*(s-1)=2	0.34	0.17	4.72
Error (Residual)	17-2-1-2=12	0.43	s ² =0.036	

Total n=18-1=17

3.885293835
=F.INV.RT(0.05, 2, 12)

- Ελέγχουμε αν τα επίπεδα pH διαφέρουν συγκρίνοντας την τιμή $F = (pH\ MS)/(Residual\ MS) = 590$ με το 5% σημείο της F – κατανομής με 2 και 12 df (pH df και Residual df) που είναι 3.89 (δες πίνακα F-κατανομής στο τέλος)
- Επειδή η τιμή της $F = 590$ είναι πολύ μεγαλύτερη από το 3.89, υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των επιπέδων pH ($P < 0.05$)



Two-Way Anova with interaction

Η ANOVA παρουσιάζεται με τον εξής πίνακα:

Source of variation	df	SS	MS=SS/df	F=MS/s ²
pH	w-1=2	42.46	21.23	590
Sa	s-1=1	0.86	0.86	23.89
Interaction pH*sa	(w-1)*(s-1)=2	0.34	0.17	4.72
Error (Residual)	17-2-1-2=12	0.43	s ² =0.036	

Total n=18-1=17

4.747225347
=F.INV.RT(0.05, 1, 12)

- Ελέγχουμε αν τα επίπεδα sa διαφέρουν συγκρίνοντας την τιμή $F = (sa\ MS)/(Residual\ MS) = 23.89$ με το 5% σημείο της F – κατανομής με 1 και 12 df (sa df και Residual df) που είναι 4.75 (δες πίνακα F-κατανομής στο τέλος)
- Επειδή η τιμή της $F = 23.89$ είναι μεγαλύτερη από το 4.75, υπάρχει διαφορά μεταξύ των επιπέδων pH ($P < 0.05$)



Two-Way Anova with interaction

Η ANOVA παρουσιάζεται με τον εξής πίνακα:

Source of variation	df	SS	MS=SS/df	F=MS/s ²
pH	w-1=2	42.46	21.23	590
Sa	s-1=1	0.86	0.86	23.89
Interaction pH*sa	(w-1) * (s-1)=2	0.34	0.17	4.72
Error (Residual)	17-2-1-2=12	0.43	s ² =0.036	

Total n=18-1=17

3.885293835
=F.INV.RT(0.05, 2, 12)

- Ελέγχουμε αν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ pH και sa συγκρίνοντας την τιμή $F = (Interaction\ MS)/(Residual\ MS) = 4.72$ με το 5% σημείο της F – κατανομής με 2 και 12 df (Interaction df και Residual df) που είναι 3.89 (δες Πίνακα F-κατανομής στο τέλος)
- Επειδή η τιμή της $F = 4.72$ είναι μεγαλύτερη από το 3.89, υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ pH και sa ($P < 0.05$)



Two-Way Anova with interaction

- Μπορούμε να κάνουμε σύγκριση των μέσων τιμών δύο επιπέδων ρH ή δύο επιπέδων σa χρησιμοποιώντας το T-Test (όπως και στην one-way ANOVA)
- Επίσης, μπορούμε να κάνουμε σύγκριση των μέσων τιμών δύο επιπέδων ρH για ένα επίπεδο του σa χρησιμοποιώντας πάλι το T-Test (όπως και στην one-way ANOVA)



Excel

Data -> Data Analysis

Data Analysis [?] [X]

Analysis Tools

- Anova: Single Factor
- Anova: Two-Factor With Replication**
- Anova: Two-Factor Without Replication
- Correlation
- Covariance
- Descriptive Statistics
- Exponential Smoothing
- F-Test Two-Sample for Variances
- Fourier Analysis
- Histogram

OK

Cancel

Help



Excel

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: salmonel

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	43.769 ^a	5	8.754	235.179	.000
Intercept	642.014	1	642.014	17248.134	.000
sa	.845	1	.845	22.701	.000
ph	42.564	2	21.282	571.761	.000
sa * ph	.360	2	.180	4.836	.029
Error	.447	12	.037		
Total	686.230	18			
Corrected Total	44.216	17			

a. R Squared = .990 (Adjusted R Squared = .986)

32	ANOVA						
33	<i>Source of Variation</i>	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>P-value</i>	<i>F crit</i>
34	Sample	0.845	1	0.845	22.70149	0.000460488	4.747225
35	Columns	42.56444444	2	21.28222222	571.7612	1.25435E-12	3.885294
36	Interaction	0.36	2	0.18	4.835821	0.028822828	3.885294
37	Within	0.446666667	12	0.037222222			
38							
39	Total	44.21611111	17				

F-Distribution

Degrees of freedom in denominator	Degrees of freedom in numerator												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	∞
1	161.40	199.50	215.70	224.60	230.20	234.00	236.80	238.90	240.50	241.90	248.00	251.10	254.30
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.45	19.47	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.66	8.59	8.50
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.80	5.72	5.60
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.56	4.46	4.40
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.87	3.77	3.70
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.44	3.34	3.20
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.15	3.04	2.90
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	2.94	2.83	2.70
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.77	2.66	2.50
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.65	2.53	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.54	2.43	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.46	2.34	2.20
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.39	2.27	2.10
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.33	2.20	2.10
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.28	2.15	2.00
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.23	2.10	2.00
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.19	2.06	1.90
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.16	2.03	1.90
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.12	1.99	1.80
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	1.93	1.79	1.60
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.84	1.69	1.50
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.66	1.50	1.30
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.57	1.39	1.00